Sri Retnaningsih - Dewi Retno Sari S - Sumadi

Matematika XII Bahasa Untuk SMA & MA

Sri Retnaningsih
Dewi Retno Sari S
Sumadi

BUKU SEKOLAH ELEKTRONIK bse

Matematika XII Bahasa

Untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Sri Retnaningsih
Dewi Retno Sari S
Sumadi

Matematika

Untuk SMA dan MA Kelas XII Bahasa

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika

Untuk SMA dan MA Kelas XII Bahasa

- Penyusun: Sri Retnaningsih, Dewi Retno Sari S, Sumadi
- Editor : Enik Yuliatin
- Penata Letak Isi:Sukarno Rudy
- Desainer Sampul : Ady Wahyono
- Ilustrator : Susanto

- Ukuran :17,6 × 25 cm

510.07
SRI
m

SRI Retnaningsih
Matematika XII : untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah penyusun, Sri Retnaningsih, Dewi Retno, Sari S Sumadi ; editor, Enik Yuliatin; illustrator, Susanto. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
viii, 180 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 176
Indeks
ISBN 978-979-068-846-9 (no jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-853-7

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Dewi Retno III. Sari S Sumadi IV. Enik Yuliatin V. Susanto

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional Tahun 2009

Diperbanyak oleh ….

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009

Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Buku Matematika ini dirancang untuk mengembangkan kemampuan kalian dalam menghitung, mengukur, menurunkan, dan menggunakan rumus matematika yang diperlukan dalam kehidupan sehari-hari. Buku ini juga mengembangkan kemampuan kalian dalam mengomunikasikan gagasan melalui model matematika.

Pada awal bab terdapat penjelasan yang dapat membantu mengingat kembali materi yang pernah kalian pelajari. Dengan demikian, kalian akan lebih mudah mempelajari materi yang akan dibahas. Materi dalam buku ini disajikan secara runtut dan bahasa yang digunakan komunikatif sehingga mudah kalian pahami. Dalam penyajiannya, kalian akan dilibatkan secara aktif sehingga termotivasi untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis dalam mempelajari buku ini.

Penyampaian konsep-konsep materi diperjelas dengan gambar, tabel, rumus, grafik. Contoh soal yang bervariasi beserta jawabannya dan strategi-strategi yang diberikan akan membantu kalian menyelesaikan soal-soal serta bertujuan memunculkan berbagai strategi penyelesaian. Strategi-strategi tersebut dapat kalian gunakan untuk menjawab soal latihan.

Materi dalam setiap bab dilengkapi latihan sehingga kalian dapat mengomunikasikan ide dan memperoleh informasi melalui gagasan lisan dan tulisan, serta mengetahui dengan jelas aplikasi matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Kami berharap dengan membaca buku ini kalian dapat melatih cara berpikir dan bernalar, mengembangkan aktivitas kreatif, kemampuan memecahkan masalah, serta kemampuan menyampaikan informasi atau mengomunikasikan gagasan dengan logis dan mudah dipahami.

Surakarta, April 2008

Penyusun

Sajian Isi Buku

Buku Matematika XII Bahasa SMA dan MA ini terdiri atas tiga bab meliputi Bab 1 Program Linear, Bab 2 Matriks, dan Bab 3 Barisan dan Deret.

Untuk mempermudah mempelajari bab ini, buku ini memuat sajian sebagai berikut.

Bagaimana menghitung bahan baku yang tepat sehingga mendapatkan keuntungan yang maksimal? Dalam materi ini kalian akan mempelajari bagaimana mengalokasikan sumber daya untuk mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya dengan modal sekecil mungkin. Setelah mempelajari materi ini diharapkan kalian dapat menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel, merancang model matematika dari masalah program linear, dan menyelesaikan model matematika dari masalah program linear dan menafsirkan solusinya.

Apersepsi berisi gambaran awal berupa masalah kontekstual sesuai, materi yang dibahas beserta tujuan yang akan dicapai pada bab terkait.

Peta konsep berikut untuk lebih mudah mempelajari materi **Program Linear** pada bab ini.

Peta Konsep memudahkan alur siswa mempelajari materi pada setiap bab.

Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Pertidaksamaan
2. Fungsi tujuan
3. Garis selidik
4. Nilai optimum

Kata kunci merupakan kata-kata penting pada pembahasan materi untuk memu-

Sudut Matematika

Sistem pertidaksamaan linear merupakan gabungan dari beberapa pertidaksamaan linear.

Sudut Matematika disajikan untuk bah wawasan siswa karena member informasi tambahan tentang materi disajikan.

Dimensi Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Jelaskan definisi program linear dengan bahasa kalian sendiri.

Dimensi Matematika merangsang tumbuhnya berfikir kritis siswa sesuai materi yang disajikan.

Latihan 1.1

Gunakan kertas berpetak untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut untuk $x, y \in R$.

1. $3x + 5y \le 15; x \ge 0; y \ge 0$
2. $4x + 3y \le 24; x \ge 0; y \ge 0$
3. $2x + 5y \le 20; x \ge 0; y \ge 0$

Latihan disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi pada setiap subbabnya.

Rangkuman

1. Program linear adalah suatu cara untuk memecahkan persoalan tertentu yang dapat diubah menjadi model matematika.
2. Model matematika dalam program linear harus berbentuk pertidaksamaan/persamaan linear.
3. Model matematika dalam program linear terdiri atas fungsi objektif dan fungsi kendala. Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berupa daerah yang disebut daerah himpunan penyelesaian dan merupakan irisan dari tiap-tiap daerah penyelesaian pertidaksamaan. Fungsi objektif adalah fungsi yang dimaksimumkan atau diminimumkan.

Rangkuman merupakan intisari dari materi yang disajikan.

Tugas Kelompok

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

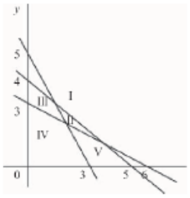
1. Teh A harganya Rp4.000,00 setiap dos dan memberikan keuntungan Rp250,00 setiap dosnya. Teh B harganya Rp6.000,00 setiap dos dan memberikan keuntungan Rp750,00 setiap dosnya. Pedagang itu mempunyai lemari kecil yang dapat memuat 50 dos teh dan modal sebesar Rp240.000,00.

Tugas kelompok menguji kemampuan siswa secara kelompok. Sehingga siswa juga bersosialisasi dengan siswa lain

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x + 2y \ge 6$; $4x + 5y \le 20$; dan $2x + y \ge 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$ adalah daerah ....



a. I
b. II
c. III
d. IV
e. V

Uji Kompetensi disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi dalam satu bab.

Refleksi

1. Lakukan kunjungan ke perusahaan atau pengusaha di daerahmu, tanyakan dan catatlah hal-hal yang terkait dengan program linear. Selanjutnya selesaikan persoalan tersebut.
2. Carilah materi mengenai program linear di internet.

Refleksi merupakan pertanyaan-pertanyaan umum sekitar pengalaman siswa setelah mempelajari materi.

Latihan Semester 1

A. Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} x + y & x \\ y & x - y \end{bmatrix}$ dan $B =$ jika $A' = B$

maka $x + 2y = ...$

a. -2
b. -1
c. 0
d. 1
e. 2

Latihan Semester disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi dalam satu semester.

Sebaiknya Anda Coba

Berapa usia seseorang jika usianya sekarang sama dengan 4 kali usianya dalam 4 tahun mendatang, dan dikurangi dengan 4 kali usianya pada 4 tahun ke belakang.

Sebaiknya Anda Coba berisi latihan yang ada hubungannya dengan materi pada bab terkait dengan tingkat kesulitan yang cukup tinggi untuk siswa.

Daftar Isi

Daftar Simbol

Simbol	Keterangan	Halaman
$\neq$	Tidak sama dengan	48
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan	11, 28, 38, 48, 136
$[a, b]$	Interval tertutup $a \leq x \leq b$	11, 12
$\in$	Elemen, anggota himpunan	12, 28
$<$	Kurang dari	14, 32, 48, 130
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	Limit untuk *f(x)*, *x* mendekati *a*	29, 32, 133
$>$	Lebih dari	2, 82, 85
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan	2, 5, 27
Σ	Sigma, penjumlahan	88, 115
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	Matriks	26,32, 46, 48, 53
det A, $\|A\|$	Determinan matriks A	46, 48, 49, 51
Δ	Determinan matriks koefisien x dan y	49
Δ_x	Determian variabel x	49, 50
Δ_y	Determinan variabel y	49, 50
u_n	Besar suku ke-n	74, 75, 77, 80, 93
S_n	Jumlah n suku	76, 77, 82, 85, 98
S_∞	Jumlah deret geometri tak hingga	85

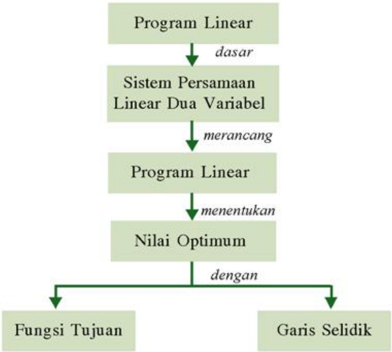
Bab

1

Program Linear

Bagaimana menghitung bahan baku yang tepat sehingga mendapatkan keuntungan yang maksimal? Dalam materi ini kalian akan mempelajari bagaimana mengalokasikan sumber daya untuk mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya dengan modal sekecil mungkin. Setelah mempelajari materi ini diharapkan kalian dapat menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel, merancang modal matematika dari masalah program linear, dan menyelesaikan model matematika dari masalah program linear dan menafsirkan solusinya.

Peta konsep berikut untuk lebih mudah mempelajari materi **Program Linear** pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Pertidaksamaan
2. Fungsi tujuan
3. Garis selidik
4. Nilai optimum

Program linear merupakan salah satu cabang matematika terapan yang berguna untuk menyelesaikan permasalahan teknik maupun sosial. Program linear ini bertujuan untuk mengalokasikan sumber daya yang bernilai ekonomis dengan tetap mempertahankan dan mempertimbangkan kendala atau pembatas dari sumber daya yang tersedia, sehingga biaya yang dikeluarkan perusahaan bisa seminimal mungkin dan diperoleh laba yang maksimal. Ingatlah kembali materi pertidaksamaan linear yang pernah kalian pelajari di kelas X. Untuk mempermudah memahami materi ini coba tentukan himpunan penyelesaian dari $2x + 3 > 0$.

A Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Persamaan atau pertidaksamaan dengan variabel hanya berpangkat satu dan tidak terdapat hasil kali variabel disebut persamaan atau pertidaksamaan linear. Bila pertidaksamaan tersebut lebih dari satu dalam suatu persoalan disebut sistem pertidaksamaan. Bentuk umum pertidaksamaan linear dua variabel adalah:

1. $ax + by + c < 0$
2. $ax + by + c > 0$
3. $ax + by + c \leq 0$
4. $ax + by + c \geq 0$

Perhatikan contoh-contoh di bawah ini untuk memahami bagaimana menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan.

Contoh 1.1

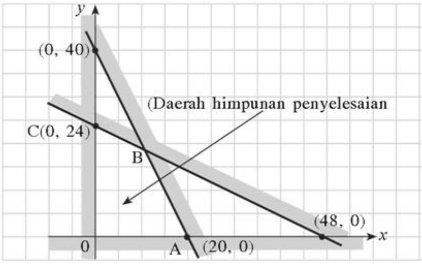
Tunjukkan pada kertas berpetak himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut.

$2x + y \leq 40$; $x + 2y \leq 48$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x, y \in \boldsymbol{R}$

Jawab:

$2x + y = 40$

x	0	20
y	40	0



$x + 2y = 48$

x	0	48
y	24	0

Daerah himpunan penyelesaiannya merupakan himpunan semua titik pada dan di dalam segiempat $OABC$.

Contoh 1.2

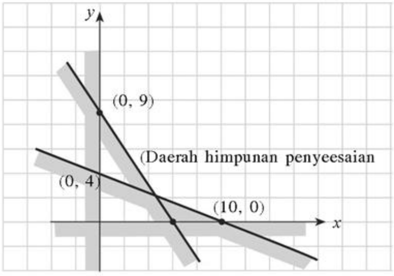
Tunjukkan pada kertas berpetak himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut.

$2x + 5y \geq 20$; $3x + 2y \geq 18$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Jawab:

$2x + 5y = 20$

x	0	10
y	4	0



$3x + 2y = 18$

x	0	6
y	9	0

Daerah himpunan penyelesaiannya bukan lagi merupakan kurva tertutup seperti pada contoh sebelumnya, tetapi merupakan kurva terbuka.

Latihan 1.1

Gunakan kertas berpetak untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut untuk $x, y \in R$.

1. $3x + 5y \leq 15; x \geq 0; y \geq 0$
2. $4x + 3y \leq 24; x \geq 0; y \geq 0$
3. $2x + 5y \leq 20; x \geq 0; y \geq 0$
4. $5x + 4y \leq 40; x \geq 0; y \geq 0$
5. $7x + 3y \leq 42; x \geq 0; y \geq 0$
6. $5x + 3y \leq 15; 2x + 7y \leq 14; x \geq 0; y \geq 0$
7. $x + y \leq 4; 3x + y \leq 6; x \geq 0; y \geq 0$
8. $2x + 3y \leq 24; 5x + 2y \leq 20; x \geq 0; y \geq 0$
9. $8x + 3y \leq 48; 3x + 7y \leq 42; x \geq 0; y \geq 0$
10. $3x + y \leq 18; 2x + 7y \leq 28; x \geq 0; y \geq 0$

B Fungsi Tujuan (Fungsi Objektif) dan Kendala dalam Masalah Program Linear

Dalam dunia usaha, seorang pengusaha pada umumnya ingin usahanya berhasil dengan baik dan mendapatkan keuntungan yang sebanyak-banyaknya. Seorang produsen merupakan salah satu contoh dari dunia usaha.

Seorang pengusaha pakaian jadi ingin memproduksi dua jenis pakaian. Setiap jenis pakaian membutuhkan 2 macam bahan, yaitu bahan A dan bahan B. Jenis pakaian I, setiap potongnya membutuhkan 2 m bahan A dan 1 m bahan B. Jenis pakaian II, setiap potongnya membutuhkan 1,2 m bahan A dan 2,5 m bahan B. Andaikan bahan A tersedia 240 m dan bahan B tersedia 200 m, berapa pakaian jenis I dan pakaian jenis II harus dibuat agar mendapatkan jumlah yang sebanyak-banyaknya? Persoalan di atas menyangkut masalah program linear.

Persoalan di atas dapat diselesaikan dengan matematika. Soal tersebut perlu diterjemahkan ke dalam bahasa matematika yang disebut *model matematika.* Keuntungan yang maksimal dan pengeluaran yang minimal merupakan tujuan dalam masalah program linear yang disebut dengan *fungsi tujuan*.

Dari data tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

Tabel Produksi Pakaian Jadi

Pakaian	Bahan A (dalam m)	Bahan B (dalam m)
Jenis pakaian I	2	1
Jenis pakaian II	1,2	2,5
Persediaan	240	200

Andaikan jenis pakaian I dibuat x potong dan jenis pakaian II dibuat y potong, maka banyaknya bahan A yang digunakan $(2x + 1,2y)$ m. Bahan A tersedia 240 m maka didapat hubungan:

$2x + 1,2y \leq 240$

$\Leftrightarrow 5x + 3y \leq 600$ .... (1)

Adapun untuk bahan B digunakan $(x + 2,5y)$ m dan tersedia bahan 200 m maka didapat hubungan:

$x + 2,5y \leq 200$

$\Leftrightarrow 2x + 5y \leq 400$ .... (2)

Karena x dan y bilangan bulat yang tidak mungkin negatif (banyaknya pakaian) maka:

$x \geq 0$ .... (3)

$y \geq 0$ .... (4)

Permasalahannya sekarang, bagaimana menentukan x dan y sehingga $x + y$ menjadi sebesar mungkin (maksimal) dengan syarat (*kendala*) (1), (2), (3), dan (4). Keempat pertidaksamaan di atas, semua pangkat dari variabel x dan y adalah satu dan tidak terdapat hasil kali x dan y.

Contoh 1.3

Suatu jenis roti membutuhkan 150 g tepung dan 50 g mentega. Roti jenis lain membutuhkan 75 g tepung dan 75 g mentega. Seseorang ingin membuat roti sebanyak-banyaknya dari dua jenis roti itu. Jika tersedia tepung 2,25 kg dan mentega 1,5 kg, sedangkan bahan-bahan lain cukup tersedia, buatlah model matematikanya.

Jawab:

Roti	Tepung (dalam g)	Mentega (dalam g)
Jenis I	150	50
Jenis II	75	75
Persediaan	2.250	1.500

Andaikan roti jenis I dibuat x buah dan roti jenis II dibuat y buah maka didapat sistem pertidaksamaan linear dalam x dan y sebagai berikut.

$150x + 75y \leq 2.250$

$\Leftrightarrow\ 2x + y \leq 30$ .... (1)

$50x + 75y \leq 1.500$

$\Leftrightarrow\ 2x + 3y \leq 60$ .... (2)

$x \geq 0$ .... (3)

$y \geq 0$ .... (4)

$x, y \in \boldsymbol{R}$

Sudut Matematika

Sistem pertidaksamaan linear merupakan gabungan dari beberapa pertidaksamaan linear.

Contoh 1.4

Seorang pedagang buah-buahan menggunakan mobil untuk menjual rambutan dan mangga. Harga pembelian rambutan per kg adalah Rp2.100,00 dan mangga per kg Rp3.000,00. Modal yang ada hanya Rp1.800.000,00, sedangkan mobilnya hanya dapat mengangkut tidak lebih dari 750 kg. Jika keuntungan rambutan Rp450,00 per kg dan mangga Rp300,00 per kg, buatlah model matematikanya dan tulislah labanya sebagai fungsi dari x dan y atau $L(x, y)$.

Jawab:

Buah	Harga/kg (dalam Rp)	Keuntungan/kg (dalam Rp)
Rambutan	2.100	450
Mangga	3.000	300

Persediaan uang Rp1.800.000,00. Andaikan rambutan dibeli x kg dan mangga y kg maka model matematikanya sebagai berikut.

$x + y \leq 750$ .... (1)

$2.100x + 3.000y \leq 1.800.000$

$\Leftrightarrow 7x + 10y \leq 6.000$ .... (2)

$x \geq 0$................................ (3)

$y \geq 0$................................ (4)

$x, y \in C$

Keuntungan $L(x, y) = 450x + 300y$.

Contoh 1.5

Sebuah pesawat dengan tujuan Solo–Jakarta mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 125 penumpang yang terdiri atas 2 kelas. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi maksimum 30 kg dan untuk kelas ekonomi hanya dapat membawa bagasi maksimum 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi maksimum 3.000 kg. Buatlah model matematikanya.

Jawab:

Penumpang	Bagasi (dalam kg)
Kelas utama	30
Kelas ekonomi	20

Andaikan kelas utama sebanyak x penumpang dan kelas ekonomi sebanyak y penumpang maka didapat sistem pertidaksamaan linear dalam x dan y sebagai berikut.

$x + y \leq 125$ .... (1)

$30x + 20y \leq 3.000$

$\Leftrightarrow 3x + 2y \leq 300$ .... (2)

$x \geq 0$... (3)

$y \geq 0$... (4)

$x, y \in C$

Latihan 1.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

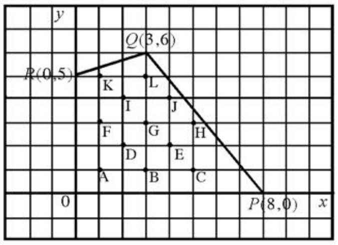
1. Suatu jenis roti membutuhkan 100 g tepung dan 200 g mentega. Roti jenis lain membutuhkan 150 g tepung dan 100 g mentega. Jika tersedia tepung 1,5 kg dan mentega 2 kg, sedangkan bahan-bahan lain cukup tersedia, buatlah model matematikanya.

2. Seorang pedagang sepeda ingin membeli sepeda untuk persediaan di tokonya sebanyak 30 buah. Jenis sepeda yang akan dibeli adalah sepeda mini dengan harga Rp300.000,00 sebuah dan sepeda federal seharga Rp500.000,00 sebuah. Uang yang tersedia untuk membeli sepeda itu Rp11.000.000,00. Buatlah model matematikanya.
3. Sebuah pesawat penumpang mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 60 penumpang yang terdiri atas dua kelas. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi maksimum 40 kg dan untuk kelas ekonomi maksimum 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi maksimum 1.800 kg. Buatlah model matematikanya.
4. Seorang pedagang buah-buahan menggunakan mobil untuk menjual rambutan dan mangga. Harga pembelian rambutan Rp2.000,00 per kg dan mangga Rp2.500,00 per kg. Modal yang ada hanya Rp1.350.000,00, sedangkan mobilnya hanya dapat mengangkut tidak lebih dari 600 kg. Jika keuntungan rambutan Rp400,00 per kg dan mangga Rp500,00 per kg, buatlah model matematikanya dan tulislah labanya sebagai fungsi dari x dan y.
5. Sebuah pabrik ban memproduksi dua macam ban A dan B. Proses pembuatan ban sepeda melalui tiga mesin yaitu I, II, dan III. Tiap ban A diproses satu per satu selama 2 menit pada mesin I, 8 menit pada mesin II, dan 10 menit pada mesin III. Tiap ban B diproses selama 5 menit pada mesin I, 4 menit pada mesin II, dan tidak diproses pada mesin III. Tiap mesin dapat dioperasikan selama 800 menit tiap hari. Jika keuntungan tiap ban A adalah Rp9.000,00 dan tiap ban B adalah Rp12.000,00, buatlah model matematikanya dan tulislah labanya sebagai fungsi dari x dan y.
6. Seorang penjahit pakaian akan membuat dua macam pakaian anak-anak dari bahan katun dan teteron. Untuk membuat pakaian jenis pertama diperlukan 1 m katun dan 0,8 m tetoron. Untuk pakaian jenis kedua diperlukan 0,5 m katun dan 0,2 m teteron. Tersedia bahan katun sebanyak 140 m dan tetoron 96 m. Dianggap seluruh bahan dapat dimanfaatkan. Jika keuntungan tiap pakaian jenis pertama Rp2.000,00 dan jenis kedua Rp1.600,00, buatlah model matematikanya dan tulislah labanya sebagai fungsi dari x dan y.

C. Nilai Optimum Fungsi Tujuan

1. Bentuk Fungsi Tujuan *ax + by*

Menentukan nilai optimum suatu program linear dapat dengan mencari nilai optimum fungsi tujuan yang dimaksud.



Dari gambar di atas, tentukan nilai dari $2x + y$ untuk masing-masing noktah. Kita dapat menyelesaikannya dengan cara berikut ini.

Nilai bentuk objektif $2x + y$ dapat dilihat pada daftar di bawah ini.

	$A(1, 1)$	$B(3, 1)$	$C(5, 1)$	$D(2, 2)$	$E(4, 2)$	$F(1, 3)$
$2x + y$	3	7	11	6	10	5
	$G(3, 3)$	$H(5, 3)$	$I(2, 4)$	$J(4, 4)$	$K(1, 5)$	$L(3, 5)$
$2x + y$	9	13	8	12	7	11

2. Menentukan Nilai Optimum Bentuk Fungsi Tujuan

Untuk menentukan nilai optimum bentuk fungsi tujuan tidak lain adalah mencari nilai optimum fungsi tujuan.

Contoh 1.6

Tentukan nilai maksimum dari $3x + 2y$ di titik *OPQR* dari gambar contoh sebelumnya.

Jawab:

Perhatikan daftar di bawah ini.

Titik	$O(0, 0)$	$P(8, 0)$	$Q(3, 6)$	$R(0, 5)$
$3x + 2y$	0	24	21	10

Dengan memperhatikan daftar di atas, didapatkan nilai maksimum pada titik $P(8, 0)$. Titik yang menghasilkan nilai maksimum ini disebut titik optimum. Jadi, penyelesaian optimum adalah $x = 8$ dan $y = 0$ dengan nilai optimum $3x + 2y$ adalah 24.

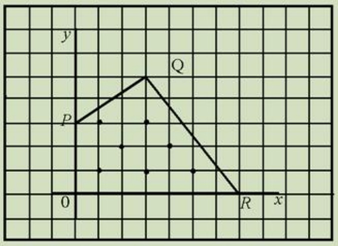
Catatan:

Nilai optimum ada dua macam, yaitu maksimum dan minimum.

Latihan 1.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. a. Gambarlah daerah yang memenuhi pertidaksamaan berikut.
   $1 \le x \le 5$; $2 \le y \le 6$; $x, y \in \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{C}$ himpunan bilangan cacah.
   b. Tandailah nilai $2x + y$ pada masing-masing titik, (misalnya di titik (1, 2) adalah 4).
   c. Berapakah nilai maksimum dari $2x + y$ dan di titik manakah itu terjadi?
   d. Berapakah nilai minimum dari $2x + y$ dan di titik manakah itu terjadi?
   e. Tulislah himpunan penyelesaian dari $2x + y \le 10$.
2. Daerah *OPQR* pada gambar berikut menyatakan himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan.



a. Tentukan nilai dari $3x + 4y$ di titik yang ditandai dengan noktah.
b. Berapakah nilai dari $3x + 4y$ di O, P, Q, dan R?
c. Tentukan nilai minimum $3x + 4y; x, y \in \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{C}$ himpunan bilangan cacah.
d. Tentukan nilai maksimum $3x + 4y; x, y \in \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{C}$ himpunan bilangan cacah

3. Perhatikan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan:
   $x + y \leq 5; x + 2y \leq 6; x \geq 0; y \geq 0; x, y \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real.
   a. Tentukan nilai dari $2x + y$ pada titik sudut yang merupakan himpunan penyelesaian.
   b. Tentukan nilai maksimum atau optimumnya.
4. Perhatikan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan:
   $x + 2y \geq 8; 3x + 2y \geq 12; x \geq 0; y \geq 12; x, y \in \boldsymbol{R}$.
   a. Tentukan nilai dari $2x + 3y$ pada titik sudut yang merupakan himpunan penyelesaian.
   b. Tentukan nilai minimum atau optimumnya.

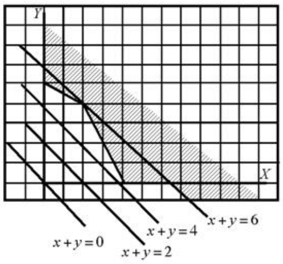
3. Garis Selidik Berbentuk $ax + by = k$

Cara lain untuk menentukan nilai optimum dari suatu fungsi tujuan adalah dengan menggunakan garis selidik $ax + by = k$.

Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.7

Gambar di samping merupakan daerah penyelesaian yang memenuhi $2x + y \leq 8; x + 2y \leq 10;$ $x \geq 0$; $y \geq 0$ untuk x, $y \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real. Tentukan nilai maksimum $x + y$ dengan syarat di atas.



Jawab:

Perhatikan himpunan garis-garis sejajar dengan persamaan $x + y = k$, dengan $k \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real. Pada gambar garis-garis $x + y = k$ dengan $k = 0, 2, 4, 6$. Perhatikan bahwa jika k makin besar maka garis-garis tersebut letaknya makin jauh dari pangkal.

Menyelidiki Sifat Beberapa Garis

a. $k = 0$, memberikan garis yang melalui titik pangkal, yaitu $x + y = 0$ yang memberikan nilai minimum nol dari $x + y$.

b. $k = 2$, garis $x + y = 2$ memotong daerah penyelesaian yang mungkin menjadi suatu bagian segitiga dengan $x + y \leq 2$.

c. Untuk mencari nilai optimum yaitu nilai maksimum atau minimum dari $x + y$, kita harus menggambar suatu garis yang sejajar dengan garis $x + y = 0$, misal melalui A, B, atau C. Garis yang dicari, yaitu $x + y = 6$. Jadi, nilai maksimumnya $x + y = 6$. Himpunan garis yang sejajar dengan $x + y = k$ merupakan salah satu garis selidik yang berbentuk $ax + by = k$. Nilai optimum bentuk objektif garis selidik $ax + by = k$ adalah 6, yaitu pada garis $x + y = 6$.

Latihan 1.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Perhatikan himpunan titik-titik yang menyatakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $2 \leq x \leq 4$; $1 \leq y \leq 3$ untuk $x, y \in \boldsymbol{C}$.
   a. Dengan menggunakan pensil berwarna, tandailah nilai $x + y$ pada setiap titik, misalnya di titik (2, 1) nilai $x + y = 3$.
   b. Gambarlah himpunan garis $x + y = k$, untuk $k = 3, 4, 5, 6, 7$. Apakah yang dapat kamu catat?
   c. Tulislah nilai maksimum dan minimum dari $x + y$ pada himpunan penyelesaian.
2. Tunjukkan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan: $2x + y \leq 9$; $x + 2y \leq 9$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ untuk $x, y \in \boldsymbol{R}$.
   a. Gambarlah garis $x + y = k$, untuk $k = 0, 2, 4, 6$.
   b. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $x + y$ pada himpunan penyelesaian.
3. Perhatikan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan: $x + y \leq 6$; $2x + y \geq 3$; $1 \leq x \leq 4$; $y \geq 0$ untuk $x, y \in \boldsymbol{R}$.
   a. Lukislah garis yang sejajar dengan garis $4x + y = 0$.
   b. Tentukan nilai minimum $4x + y$.
   c. Tentukan nilai maksimum $4x + y$.

D. Nilai Optimum dari Fungsi Tujuan sebagai Penyelesaian dari Program Linear

Nilai optimum dari fungsi tujuan diperoleh dari titik yang menghasilkan nilai maksimum atau minimum dan biasanya diperoleh dari koordinat titik sudut bila variabelnya merupakan bilangan real. Adapun bila variabelnya merupakan bilangan cacah, maka nilai optimumnya diperoleh dari koordinat titik sudut yang absis dan ordinatnya merupakan bilangan cacah. Jika salah satu atau keduanya bukan bilangan cacah, maka nilai optimum diperoleh dari koordinat di sekitar titik sudut tersebut.

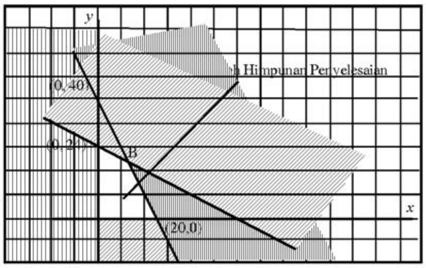
Contoh 1.8

Gambarlah daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dengan kendala berikut.

$x + 2y \leq 48$; $2x + y \leq 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; untuk $x, y \in \boldsymbol{C}$.

Selanjutnya, tentukan harga $x + y$ (fungsi tujuan) supaya nilainya maksimum.

Jawab:



Dengan melihat gambar di atas diperoleh koordinat titik $O(0, 0)$, $A(20, 0)$, $C(0, 24)$. Koordinat titik B diperoleh dari perpotongan garis $x + 2y = 48$ dan garis $2x + y = 40$, yaitu:

$$\begin{array}{l|c|l} x + 2y = 48 & \times 2 & 2x + 4y = 96 \\ 2x + y = 40 & \times 1 & \underline{2x + y = 40} \; - \\ & & \;3y = 56 \end{array}$$

$$y = 18\frac{2}{3}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $y = 18\frac{2}{3}$ ke dalam salah satu persamaan garis diperoleh nilai $x = 10\frac{2}{3}$.

Berhubung $x, y \in \boldsymbol{C}$ (himpunan bilangan cacah) sehingga jika $x = 10$ maka $y = 19$ dan jika $x = 11$ maka $y = 18$. Jadi, titik $B_1(10, 19)$ atau $B_2(11, 18)$. Selanjutnya dicari koordinat titik-titik di sekitar titik B yang menghasilkan bilangan cacah. Untuk mencari $x + y$ (maksimum) adalah sebagai berikut.

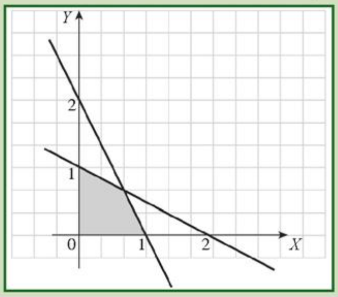
Titik	$(x + y)$ Maksimum
$O(0, 0)$	0
$A(20, 0)$	20
$B_1(10, 19)$	29
$B_2(11, 18)$	29
$C(0, 24)$	24

Terlihat bahwa nilai maksimumnya di sekitar titik B sehingga penyelesaian optimumnya adalah $x = 10$, $y = 19$ atau $x = 11$, $y = 18$. Jadi, nilai optimum dari $x + y$ adalah 29. Bagaimana jika kalian menggunakan garis selidik? Gunakan garis selidik untuk mencari nilai maksimum pada contoh di atas.

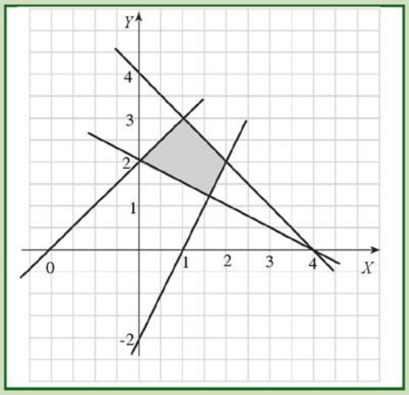
Latihan 1.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Dalam sistem pertidaksamaan $2y \geq x$; $y \leq 2x$; $2y + x \leq 20$; $x + y \geq 9$ untuk $x, y \in \boldsymbol{R}$, tentukan nilai maksimum $3y - x$.
2. Tentukan nilai maksimum dari $f(x, y) = 3x + 4y$ di daerah yang diarsir.



3. Tentukan nilai maksimum dari $f(x, y) = 2x + 2y - 5$ didefinisikan pada daerah yang diarsir.



4. Dalam sistem pertidaksamaan $3x + 2y \leq 12$; $4x + 7y \leq 28$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ untuk $x, y \in C$; C himpunan bilangan cacah, tentukan nilai maksimum $2x + 3y$.
5. Dalam sistem pertidaksamaan $3x + 2y \geq 12$; $2x + 3y \geq 12$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ untuk $x, y \in C$; C himpunan bilangan cacah, tentukan nilai maksimum dari $3x + 2y$.

E Menafsirkan Nilai Optimum dalam Program Linear

Bagaimana cara menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum) dengan program linear? Untuk memahaminya perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.9

Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 100 pasang dan sepatu wanita paling sedikit 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan tiap pasang sepatu laki-laki Rp6.000,00 dan setiap pasang sepatu wanita Rp3.000,00. Jika banyaknya sepatu laki-laki tidak boleh lebih dari 150 pasang, tentukan keuntungan maksimumnya.

Jawab:

Misal sepatu laki-laki = x; sepatu wanita = y; $x, y \in A$.

Fungsi objektif: $6.000x + 3.000y$

Syarat (kendala) yang harus dipenuhi adalah:

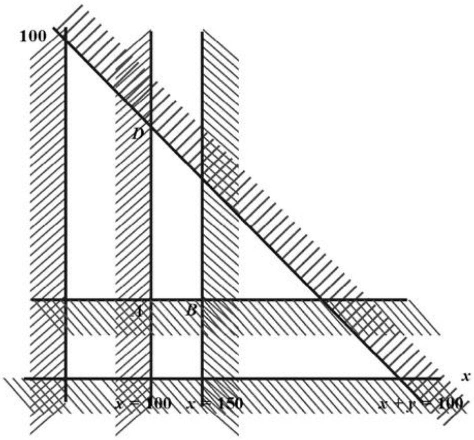
$x \geq 100$; $y \geq 150$; $x + y \leq 400$; $x \leq 150$.

Selanjutnya tentukan nilai maksimum dari $6.000x + 3.000y = 3.000 (2x + y)$.

Dimensi Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Jelaskan definisi program linear dengan bahasa kalian sendiri.



Menentukan nilai optimum fungsi objektif dengan tabel

Titik	$6.000x + 3.000y$ (Maksimum)
$A(100, 150)$	1.050.000
$B(150, 150)$	1.350.000
$C(150, 250)$	1.650.000
$D(100, 300)$	1.500.000

Jadi, dari tabel di atas diperoleh keuntungan maksimumnya Rp1.650.000,00 yang terdiri atas 150 pasang sepatu laki-laki dan 250 pasang sepatu wanita.

Latihan 1.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Luas daerah parkir 500 m^2. Luas rata-rata kendaraan 5 m^2 untuk mobil dan 20 m^2 untuk bus. Biaya parkir masing-masing Rp1.000,00 dan Rp2.000,00. Daerah parkir itu dapat memuat tidak lebih dari 60 buah kendaraan. Berapakah banyaknya masing-masing kendaraan agar diperoleh pendapatan maksimum?
2. Untuk menghasilkan barang seharga Rp1.000.000,00 dengan jenis A dan barang dengan jenis B seharga Rp1.200.000,00 diperlukan bahan baku 20 kg untuk barang A dan 30 kg untuk barang B. Barang A membutuhkan kerja mesin selama 24 jam dan barang B selama 18 jam. Jika bahan baku yang tersedia 750 kg dan dibuat selama 720 jam, tentukan nilai maksimum produk yang dibuat.
3. Pak Tono akan mengangkut 60 ton barang dari gudang ke tokonya. Ia dapat menyewa dua macam truk. Truk I kapasitasnya 3 ton dengan sewa Rp50.000,00 dan truk II kapasitasnya 2 ton dengan sewa Rp30.000,00. Jika untuk mengangkat barang tersebut sekurang-kurangnya diperlukan 24 perjalanan, maka berapakah biaya minimumnya?
4. PT ARUNG merencanakan membangun dua jenis rumah untuk menampung 650 orang. Jenis pertama dapat menampung 5 orang dengan sewa Rp4.000.000,00 per tahun. Jenis kedua dapat menampung 10 orang dengan sewa Rp5.000.000,00 per tahun. Berapa sewa paling sedikit jika dibangun 100 buah rumah?
5. Pesawat udara mempunyai tempat duduk 50 buah. Setiap penumpang kelas utama bagasinya maksimum 50 kg dan setiap penumpang kelas ekonomi bagasinya maksimum 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi 1.150 kg. Jika tiket untuk setiap penumpang kelas utama Rp500.000,00 dan untuk kelas ekonomi Rp250.000,00, tentukan besarnya pendapatan maksimum untuk sekali jalan.
6. Pabrik mainan anak-anak memproduksi 2 jenis boneka. Keuntungan boneka I Rp15.000,00 per buah. Keuntungan boneka II Rp17.500,00 per buah. Untuk memproduksi kedua jenis boneka itu diperlukan 3 buah mesin, yaitu mesin A, mesin B, dan mesin C. Waktu yang diperlukan untuk memproduksi tiap-tiap boneka dengan ketiga mesin dan kemampuan ketiga mesin selama 1 periode seperti tabel berikut.

a. Berapa banyaknya masing-masing boneka yang dapat dibuat agar diperoleh keuntungan yang maksimum selama satu periode waktu?

b. Tentukan besarnya keuntungan maksimum tersebut.

Hasil Produksi	Mesin A (jam)	Mesin B (jam)	Mesin C (jam)
Boneka I	5	3	1
Boneka II	3	5	1
Persediaan waktu untuk 1 periode	1.500	1.500	400

7. Seorang pedagang buah-buahan menggunakan mobil untuk menjajakan dagangannya yang berupa rambutan dan kelengkeng dengan harga beli Rp4.000,00 per kg untuk rambutan dan Rp10.000,00 per kg untuk kelengkeng. Modal yang ada Rp4.000.000,00, sedangkan mobilnya tidak dapat memuat lebih dari 750 kg. Keuntungan untuk rambutan Rp1.000,00 per kg dan kelengkeng Rp2.000,00 per kg. Jika yang dibeli dapat terjual habis, tentukanlah berikut ini.

   a. Banyaknya masing-masing jenis buah yang dibeli oleh pedagang tadi agar didapat keuntungan yang maksimum.

   b. Berapa keuntungan maksimumnya?

Rangkuman

1. Program linear adalah suatu cara untuk memecahkan persoalan tertentu yang dapat diubah menjadi model matematika.
2. Model matematika dalam program linear harus berbentuk pertidaksamaan/persamaan linear.
3. Model matematika dalam program linear terdiri atas fungsi objektif dan fungsi kendala. Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berupa daerah yang disebut daerah himpunan penyelesaian dan merupakan irisan dari tiap-tiap daerah penyelesaian pertidaksamaan. Fungsi objektif adalah fungsi yang dimaksimumkan atau diminimumkan.

4. Menyelesaikan persoalan program linear dengan variabel.
   a. Ubahlah soalnya ke dalam bahasa matematika dan bentuklah model matematika yang terdiri atas sistem pertidaksamaan, dan fungsi objektif $ax + by$ yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan.
   b. Perlihatkan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan pada diagram Cartesius. Titik pada atau di dalam poligon memberikan penyelesaian yang mungkin.
   c. Pilihlah titik (titik-titik) yang memberikan penyelesaian yang paling baik dengan menyelidiki titik di dalam daerah himpunan penyelesaian yang memberikan nilai maksimum/minimum dari fungsi objektif $ax + by$ atau dengan menggunakan garis selidik.
5. Titik untuk $x, y \in \boldsymbol{R}$ selalu terletak pada titik sudut atau pada sisi daerah himpunan penyelesaian. Untuk $x, y \in \boldsymbol{C}$ titik optimumnya tidak selalu pada titik sudut, tetapi di sekitar titik sudut yang masih merupakan daerah himpunan penyelesaian.

Tugas Kelompok

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Teh *A* harganya Rp4.000,00 setiap dos dan memberikan keuntungan Rp250,00 setiap dosnya. Teh *B* harganya Rp6.000,00 setiap dos dan memberikan keuntungan Rp750,00 setiap dosnya. Pedagang itu mempunyai lemari kecil yang dapat memuat 50 dos teh dan modal sebesar Rp240.000,00.
   a. Berapa dos masing-masing teh yang dibeli oleh pedagang tadi agar diperoleh keuntungan maksimum?
   b. Hitunglah keuntungan maksimum tersebut.
2. Seorang pasien dianjurkan oleh dokter agar setiap harinya minum obat yang mengandung sekurang-kurangnya 40 mg vitamin A dan 60 mg vitamin C. Pasien tersebut dapat minum dari obat jenis I yang setiap tabletnya 5 mg vitamin A dan 10 mg vitamin C, atau obat jenis II yang setiap tabletnya mengandung 15 mg vitamin A dan 5 mg vitamin C. Obat jenis I seharga Rp1.500,00 tiap tablet. Obat jenis II seharga Rp2.000,00 tiap tablet.
   a. Berapa tablet jenis I dan tablet jenis II yang diminum pasien tersebut agar setiap harinya mengeluarkan biaya minimum?
   b. Berapa rupiah biaya minimum setiap harinya?

Refleksi

1. Lakukan kunjungan ke perusahaan atau pengusaha di daerahmu, tanyakan dan catatlah hal-hal yang terkait dengan program linear. Selanjutnya selesaikan persoalan tersebut.
2. Carilah materi mengenai program linear di internet.

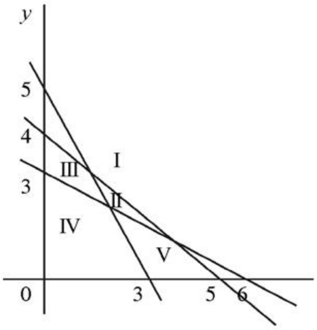
Sebaiknya Anda Coba

Berapa usia seseorang jika usianya sekarang sama dengan 4 kali usianya dalam 4 tahun mendatang, dan dikurangi dengan 4 kali usianya pada 4 tahun ke belakang.

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e.*

1. Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x + 2y \geq 6$; $4x + 5y \leq 20$; dan $2x + y \geq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah daerah ....

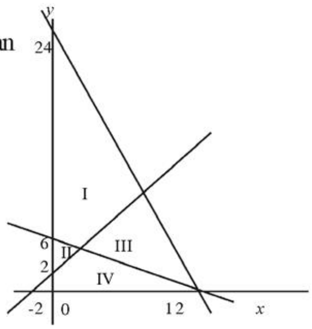


a. I
b. II
c. III
d. IV
e. V

2. Perhatikan gambar berikut.

   Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan

   $\begin{cases} 2x + y \leq 24 \\ x + 2y \geq 12 \\ x - y \geq -2 \end{cases}$ adalah daerah ....



   a. I
   b. II
   c. III
   d. IV
   e. V

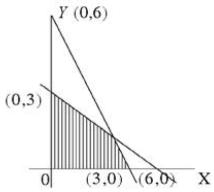
3. Nilai maksimum $4x + 5y$ dengan $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 10$, dan $x + y \leq 7$ adalah ....

   a. 34
   b. 33
   c. 32
   d. 31
   e. 30

4. Nilai minimum untuk $2x + 5y$ dengan syarat $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 12$, dan $x + 2y \geq 16$ adalah ....

   a. 24
   b. 32
   c. 36
   d. 40
   e. 60

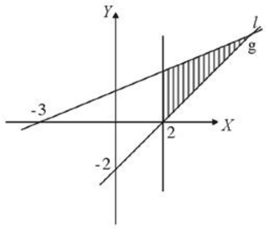
5.



   Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan himpunan penyelesaian suatu program linear. Nilai maksimum fungsi sasaran $f(x, y) = x + y$ sama dengan ....

   a. 12
   b. 9
   c. 8
   d. 6
   e. 4

6.



Jika daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian untuk soal program linear dengan fungsi sasaran $f(x, y) = x - y$, maka nlai maksimum adalah ....

a. $f(3, 1)$

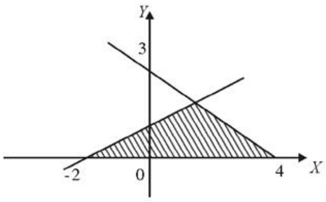
b. $f(4, 1)$

c. $f(2, \frac{5}{3})$

d. $f(3, 2)$

e. $f(4, \frac{5}{2})$

7.



Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan ....

a. $y \geq 0$; $x - 2y \geq -2$; $3x + 4y \leq 12$

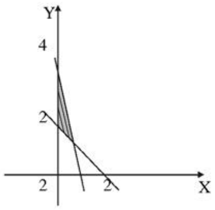
b. $y \geq 0$; $x - 2y \leq -2$; $3x + 4y \geq 12$

c. $y \geq 0$; $-2x + y \geq -2$; $4x + 3y \leq 12$

d. $x \geq 0$; $-2x + y \leq -2$; $4x + 3y \geq 12$

e. $x \geq 0$; $x - 2y \leq -2$; $3x + 4y \leq 12$

8.



Daerah yang diarsir pada gambar berikut merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan ....

a. $x \geq 0$; $4x + y \geq 4$; $x + y \leq 2$

b. $x \geq 0$; $4x + y \leq 4$; $x + y \geq 2$

c. $x \geq 0$; $4x + y > 4$; $x + y \leq 2$

d. $x \geq 0$; $x + 4y > 4$; $x + y < 2$

e. $x \geq 0$; $x + 4y \leq 4$; $x + y \geq 2$

9. Nilai minimum dari $z = 3x + 6y$ yang memenuhi syarat:

$$\begin{aligned} 4x + y &\geq 20; \\ x + y &\leq 20; \\ x + y &\geq 10; \\ x &\geq 0; \\ y &\geq 0; \end{aligned}$$

adalah ....

a. 50
b. 40
c. 30
d. 20
e. 10

10. Rokok A yang harga belinya Rp1.000,00 dijual dengan harga Rp1.100,00 per bungkus sedangkan rokok *B* yang harga belinya Rp1.500,00 dijual dengan harga Rp1.700,00 per bungkus. Seorang pedagangan rokok yang mempunyai modal Rp300.000,00 dan kiosnya dapat menampung paling banyak 250 bungkus rokok akan mendapat keuntungan maksimum jika ia membeli ....

a. 150 bungkus rokok A dan 100 bungkus rokok B
b. 100 bungkus rokok A dan 150 bungkus rokok B
c. 250 bungkus rokok A dan 200 bungkus rokok B
d. 250 bungkus rokok A saja
e. 200 bungkus rokok B saja

11. Apabila x, $y \in$ R terletak pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan ....

$$\begin{aligned} x + 3y &= 9 \\ 2x + y &= 8 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Maka nilai maksimum fungsi sasaran $x + 2y$ pada himpunan penyelesaian x, y bilangan real ialah ....

a. 6
b. 7
c. 8
d. 9
e. 4

12. Untuk membuat barang A diperlukan 6 jam pada mesin I dan 4 jan pada mesin II, sedangkan barang-barang jenis B memerlukan 2 jam pada mesin I dan 8 jam pada mesin II, kedua mesin tersebut setiap harinya bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari dibuat x buah barang A dan y buah barang B, maka model matematika dari uraian diatas adalah ....
    a. $6x + 4y = 18$, $2x + 8y = 18$, $x = 0$, $y = 0$
    b. $4x + 6y = 18$, $8x + 2y = 18$, $x = 0$, $y = 0$
    c. $3x + y = 9$, $2x + 4y = 9$, $x = 0$, $y = 0$
    d. $3x + 4y = 9$, $2x + y = 9$, $x = 0$, $y = 0$
    e. $4x + 3y = 9$, $x + 2y = 9$, $x = 0$, $y = 0$
13. Rokok A yang harganya Rp200,00 per bungkus dijual dengan laba Rp40,00 per bungkus, sedangkan rokok B yang harganya Rp100,00 per bungkus dijual dengan laba Rp30,00 per bungkus. Seorang pedagang rokok yang mempunyai modal Rp80.000,00 dan kiosnya maksimum dapat menampung 500 bungkus rokok, akan memperoleh keuntungan sebesar-besarnya jika ia membeli ….
    a. 300 bungkus rokok A dan 200 bungkus rokok B
    b. 200 bungkus rokok A dan 300 bungkus rokok B
    c. 250 bungkus rokok A dan 250 bungkus rokok B
    d. 100 bungkus rokok A dan 400 bungkus rokok B
    e. 400 bungkus rokok A dan 100 bungkus rokok B
14. Suatu perusahaan tas dan sepatu memerlukan empat unsur a dan enam unsur b per minggu untuk masing-masing hasil produksinya. Setiap tas memerlukan satu unsur a dan dua unsur b. Setiap sepatu memerlukan dua unsur a dan dua unsur b Bila setiap tas untung 3.000 rupiah, setiap sepatu untung 2.000 rupiah, maka banyak tas atau sepatu yang dihasilkan per minggu agar diperoleh untung yan maksimal ialah ….
    a. 3 tas
    b. 4 tas
    c. 2 sepatu
    d. 3 sepatu
    e. 2 tas dan 1 sepatu
15. Seorang pemilik toko mempunyai jualan telur ayam dan telur bebek. Ia hanya ingat bahwa banyaknya telur bebek 20 butir lebih banyak dari banyaknya telur ayam, sedangkan uang hasil penjualan seluruhnya = Rp560,00. Bila harga sebutir telur bebek + sebutir telur ayam = Rp12,00 dan selisih harga sebutir telur bebek dengan sebutir telur ayam Rp2,00 maka banyaknya telur ayam ….
    a. 25
    b. 30
    c. 32
    d. 35
    e. 40

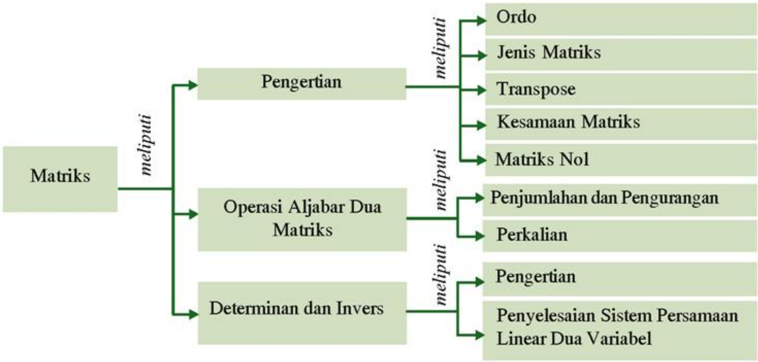
Bab 2

Matriks

Laporan berbentuk daftar atau tabel dapat disederhanakan dalam bentuk kelompok bilangan yang teratur menurut baris dan kolom yang disebut matriks. Hal ini untuk memudahkan kita dalam membaca data. Matriks seringkali digunakan dalam kehidupan sehari-hari untuk menyajikan berbagai keterangan. Misalnya daftar jumlah pasien di rumah sakit, data absensi, atau daftar nilai mata pelajaran.

Setelah mempelajari bab ini diharapkan kalian dapat menggunakan sifat-sifat dan operasi matriks untuk menunjukkan bahwa suatu matriks persegi merupakan invers dari matriks persegi lain, menentukan determinan dan invers matriks 2×2 serta menggunakan determinan dan invers dalam penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel.

Peta konsep berikut untuk lebih mudah mempelajari materi **Matriks** pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa kata kunci yang perlu kalian ketahui.

1. Determinan
2. Invers
3. Matriks
4. Ordo
5. Transpose

Kita sudah sering membaca atau menyajikan suatu data dalam bentuk tabel. Pelajari kembali bagaimana membaca tabel karena akan membantu kalian mempelajari bab ini.

A. Menjelaskan Ciri Suatu Matriks

1. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris (jajaran) dan lajur (kolom). Simbol dari matriks menggunakan huruf besar (misal A). Bentuk umum dari matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to \text{baris ke-1} \\ \to \text{baris ke-2} \\ \vdots \\ \to \text{baris ke-}m \end{array} \\ \qquad \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{kolom} & \text{kolom} & \text{kolom} \\ \text{ke-1} & \text{ke-2} & \text{ke-}n \end{array} & \end{array}$$

Angka a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) yang tersusun dalam kolom dan baris disebut elemen atau komponen matriks. Bentuk umum matriks dapat dinyatakan sebagai berikut.

> $A = (a_{ij})$; dengan $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$
> $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ adalah elemen baris ke-i
> $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ adalah elemen kolom ke-j

2. Ordo Matriks

Matriks A yang terdiri atas m baris dan n kolom disebut matriks berordo $m \times n$. Jadi, ordo suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom.

Dengan adanya definisi tersebut maka bentuk umum matriks dapat dinyatakan dengan:

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan m adalah banyaknya baris
n adalah banyaknya kolom
$(m \times n)$ adalah ordo matriks

Contoh 2.1

Tentukan ordo matriks berikut.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 12 & 11 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Jawab:

a. Ordo matriks A adalah 3×3
b. Ordo matriks B adalah 2×4
c. Ordo matriks C adalah 3×4

3. Jenis-Jenis Matriks

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri satu baris atau matriks yang berordo $(1 \times m)$, dengan $m \geq 1$.

Contoh 2.2

a. $A_{(1 \times 4)} = [0 \quad 2 \quad 1 \quad 2]$
b. $B_{(1 \times 3)} = [2 \quad 1 \quad 5]$

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri satu kolom atau matriks yang berordo $(n \times 1)$, dengan $n \geq 1$.

Contoh 2.3

a. $A_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ b. $B_{(4 \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ c. $C_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. Matriks Persegi (Bujur Sangkar)

Matriks persegi adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. $A_{(m \times n)}$ disebut matriks persegi jika $m = n$. Matriks berordo $n \times n$ sering disebut matriks persegi berordo n. Pada matriks persegi elemen-elemen a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} disebut elemen-elemen diagonal utama.
Hasil penjumlahan elemen-elemen pada diagonal utama dari matriks persegi A disebut *trace A*.

$$Trace\ A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Contoh 2.4

a. $A_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. $B_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Dari contoh di atas maka diagonal utama dari $A_{(3 \times 3)}$ adalah 3, –5, 0, dan diagonal utama $B_{(2 \times 2)}$ adalah 1, 0.
Trace $A = 3 - 5 + 0 = -2$ dan trace $B = 1 + 0 = 1$.

d. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah nol.

Contoh 2.5

a. $B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah nol.

Contoh 2.6

a. $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks yang tersusun dari matriks segitiga atas dan segitiga bawah.

Contoh 2.7

a. $D_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b. $D_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

g. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks persegi yang diagonal utamanya 1.

Contoh 2.8

a. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

h. Matriks Skalar (K_n)

Matriks skalar K_n adalah suatu matriks diagonal K_n yang nilai elemen-elemen pada diagonal utama besarnya k (skalar), sedangkan elemen lainnya nol.

Contoh 2.9

a. $K_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b. $K_5 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. Transpose Suatu Matriks

Transpose dari matriks A, ditulis A' atau A^t adalah matriks yang elemen-elemennya diperoleh dengan cara mengubah setiap baris dari matriks A menjadi kolom dari matriks A^t dan sebaliknya.

Jadi, jika $A_{(m \times n)}$ maka $A^t{}_{(n \times m)}$ atau jika $A'_{(m \times n)}$ maka $A_{(n \times m)}$

Contoh 2.10

a. $A_{(1 \times 3)} = [3 \quad 2 \quad 1]$ maka $A^t_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $C_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ maka $C^t_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Latihan 2.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 & -7 \\ -5 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.
   a. Sebutkan ordo A.
   b. Sebutkan elemen-elemen kolom ke-2.
   c. Sebutkan elemen-elemen baris ke-3.
   d. Hitunglah nilai dari $a_{21} + a_{32}$; $a_{13} - a_{31} + a_{33}$.
   e. Jika $P = a_{24}$ maka tentukan $P^2 + 2P + 1$.
2. Nyatakan persamaan linear berikut dalam bentuk matriks.
   Misal: $\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 7x - 6y &= 10 \end{aligned}\right\}$ matriks koefisiennya adalah $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$
   a. $-2x + 3y = 10$
      $5x + y = 5$
   b. $3x = 7$
      $2y = 0$
   c. $3x - 2y = 5$
      $2x + y = 3$
3. Berikan contoh matriks persegi ordo 3 dari matriks berikut.
   a. Matriks skalar.
   b. Matriks segitiga bawah.
   c. Matriks segitiga atas.
   d. Matriks diagonal.

4. Sebutkan ordo matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

5. Berapakah banyaknya elemen pada matriks berikut?

a. Matriks 3×4.

b. Matriks 4×2.

c. Matriks 2×3.

d. Matriks $1 \times n$.

e. Matriks $n \times 2$.

6. Tentukan transpose dari matriks berikut.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

7. Tentukan elemen-elemen kolom dan baris dari matriks berikut.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

8. Jika matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ maka tentukan elemen dari diagonal utama dan trace P.

5. Kesamaan Dua Matriks

Dua buah matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$) apabila ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak sama.

Jadi, jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$; dan $A = B$.

Maka, $a_{11} = b_{11}$ $\qquad a_{21} = b_{21}$
$a_{12} = b_{12}$ $\qquad a_{22} = b_{22}$

Contoh 2.11

Jika $A = \begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 4 & x-y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Tentukan x dan y jika $A = B$.

Jawab:

$A = B$ maka
$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ \hline 2x &= 6 \quad + \\ x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Latihan 2.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan nilai x dan y dari persamaan matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix} -4x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} x^2 & 2y^2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} x & 2y \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 4 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan x, y, dan z jika diketahui $A = B$.

   a. $A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ z & 2y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} y-z & -1 \\ y & 8 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} x+1 & x+2y \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & z \\ 0 & 3x-y \end{bmatrix}$

   c. $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & z \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3y & 1 \\ 0 & 2x \end{bmatrix}$

3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 0 & 2x-y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan x dan y jika $A = B^t$.

4. Tentukan nilai x dan y dari persamaan berikut.

   a. $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} x+2y \\ y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

   b. $[3x \quad -y] = [12 \quad -2]$ d. $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & x+y \end{bmatrix}$

5. Tentukan nilai a dan b jika $A = B$.

   a. $A = \begin{bmatrix} 3a & 2 \\ 4 & -5b \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a+8 & 2 \\ 4 & 30 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

6. Tentukan nilai x jika $P^t = Q$.

   a. $P = \begin{bmatrix} -2 & x-2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{bmatrix}$

   b. $P = \begin{bmatrix} 2 & p \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} x+p & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

7. Tentukan nilai a dan b dari persamaan berikut.

   a. $\begin{bmatrix} 2a+b \\ a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2a \\ -3b \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 3a & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ d. $[-3a \quad 2b] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$

8. Tentukan nilai x, y, dan z jika $P^t = Q$.

$$P = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & z+3 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x-y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Pengertian Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya adalah nol (biasa dinotasikan dengan huruf O).

Contoh 2.12

a. $O_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $O_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $O_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. Pengertian Lawan Suatu Matriks

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ lawannya adalah $-A$ yang elemen-elemennya lawan dari elemen-elemen matriks A, yaitu $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$.

Penjumlahan dari matriks A dan $-A$ maka diperoleh sifat $A + (-A) = 0$ (invers aditif).

Contoh 2.13

a. $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ maka $-B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ maka $-C = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Apa yang tampak dari $[B + (-B)]$ dan $[C + (-C)]$?

B. Menuliskan Informasi dalam Bentuk Matriks

Suatu informasi dalam kehidupan sehari-hari dapat disajikan dalam bentuk matriks.

Contoh 2.14

1. Tabel keadaan siswa kelas XII pada hari Senin tanggal 13 Maret 2005 adalah sebagai berikut. Kelas A siswa yang tidak masuk dengan keterangan sakit sebanyak 3 orang dan izin sebanyak 1 orang. Kelas B siswa yang tidak masuk karena sakit 2 orang, izin sebanyak 3 orang, dan tanpa keterangan sebanyak 1 orang. Kelas C siswa yang tidak masuk karena sakit sebanyak 1 orang, izin sebanyak 2 orang, dan tanpa keterangan sebanyak 1 orang. Kelas D siswa yang tidak masuk dengan keterangan izin sebanyak 1 orang dan tanpa keterangan 3 orang. Keadaan siswa ini disajikan dalam tabel berikut.

Kelas	Sakit	Izin	Tanpa Keterangan
A	3	1	0
B	2	3	1
C	1	2	1
D	0	1	3

Dari tabel di atas jika kepala lajur dan kepala baris dihilangkan, dan bilangan diletakkan di antara dua kurung maka susunan tersebut disebut **matriks**.
Bentuk matriksnya sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Daftar harga tiket masuk suatu pertunjukan konser sebagai berikut.

Kelas	Harga
VIP	Rp100.000,00
Kelas I	Rp75.000,00
Kelas II	Rp50.000,00
Kelas III	Rp25.000,00

Dari tabel di samping akan diperoleh bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 100.000 \\ 75.000 \\ 50.000 \\ 25.000 \end{bmatrix}$$

C. Melakukan Operasi Aljabar atas Dua Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila ordonya sama. Hasil penjumlahan atau pengurangannya adalah sebuah matriks baru yang berordo sama dan diperoleh dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh 2.15

Diketahui $A_{(2\times 3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B_{(2\times 3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Tentukan $A + B$ dan $A - B$.

Jawab:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 1+0 & 3+1 \\ 0+5 & 4+2 & 5+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ merupakan bentuk matrik } C_{(2\times 3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-(-1) & 1-0 & 3-1 \\ 0-5 & 4-2 & 5-3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ merupakan bentuk matriks } D_{(2\times 3)}. \end{aligned}$$

Latihan 2.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Diketahui: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; dan $C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

   Tentukan:

   a. $A + B$
   b. $A - B$
   c. $B + C$
   d. $B - C$
   e. $A + B + C$
   f. $A - B - C$

2. Tentukan x, y, z dari persamaan berikut.

   a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   b. $[x \;\; y \;\; z] - [-5 \;\; 2 \;\; 3] = [-4 \;\; 0 \;\; 1]$

3. Tentukan matriks A dari persamaan berikut.

   a. $A + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. Tentukan x, y, z dari persamaan berikut.

   $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & y \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

5. Tentukan matriks yang belum diketahui dari persamaan berikut.

   a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - X = X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Diketahui: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; dan $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Tentukan hasil operasi berikut.

   a. $(A + C) - (A + B)$
   b. $A + B - C$
   c. $A - B + C$
   d. $A - B - C$

7. Diketahui: $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; dan $R = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Tentukan hasil operasi berikut.

a. $P + Q - R$ b. $P - Q - R$

8. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; dan $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tentukan hasil operasi berikut.

a. $(A + B) - (A - C)$ c. $(A + B) + C$

b. $A - (B - C)$ d. $(B - C) - A$

9. Tentukan nilai a, b, dan c jika $A - B = 0$.

$A = \begin{bmatrix} 6 & c \\ 10 & a \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2b & 2a \\ 10 & \frac{2}{3}b \end{bmatrix}$

10. Carilah matriks yang belum diketahui dari persamaan berikut.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

b. $D + \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $X - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} - X$

2. Perkalian Bilangan Real (Skalar) dengan Matriks

a. Mengenal Perkalian Bilangan Real dengan Matriks

Apabila k adalah bilangan real maka perkalian matriks A dengan bilangan real k, ditulis kA adalah matriks yang setiap elemennya diperoleh dengan mengalikan setiap elemen matriks A dengan k.

b. Menemukan Sifat Perkalian Bilangan Real dengan Matriks

Perkalian matriks dengan skalar (k) sama halnya dengan melakukan penjumlahan matriks yang sama sebanyak k kali.

Contoh 2.16

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Tentukan nilai dari $3A$.

Jawab:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \times 2 & 3 \times (-1) \\ 3 \times 4 & 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

atau $3A = A + A + A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 2 + 2 & -1 + -1 + -1 \\ 4 + 4 + 4 & 2 + 2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Latihan 2.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan hasil kali berikut.

   a. $2A$
   b. $-2A$
   c. $2A^t$
   d. $-2A^t$
   e. $\frac{1}{2}A$
   f. $2(A + A^t)$

2. Diketahui $X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, tentukan matriks 2×2 yang memenuhi:

   a. $2X$
   b. $3X$
   c. $-X$
   d. $-3X$

3. Tentukan a, b, c, dan d dari persamaan berikut.

a. $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 20 & -15 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

4. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan:

a. $3A$

b. $2B$

c. $5A^t$

d. $2A^t + 5B$

e. $4B^t$

f. $2B^t + 3A$

5. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan hasil perkalian berikut.

a. $3A$

b. $\frac{1}{3}A$

c. $-3A$

d. $3A + \frac{1}{3}A$

6. Jika $A = [3 \quad 2 \quad 1]$; $B = [1 \quad 2 \quad 3]$; dan $C = [0 \quad 1 \quad 2]$. Tentukan:

a. $2A - B + 3C$

b. $(\frac{1}{2}B - A) + 3(B + C)$

c. $(3A - 3B) + (2A - 3B)$

d. $4C - 2(A + B)$

7. Tentukan matriks X dari persamaan berikut.

a. $-\frac{1}{3}X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

b. $-2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

8. Tentukan matriks A dari persamaan berikut.

a. $3A + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c. $-\frac{1}{5}A + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3A$

b. $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Perkalian Matriks

a. Perkalian Matriks dan Syaratnya

Dua buah matriks A dan B dapat dikalikan apabila banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B. Elemen-elemen hasil kalinya diperoleh dengan menjumlahkan hasil kali elemen pada baris matriks A dengan elemen pada kolom matriks B (yang dinyatakan dengan $A \times B$ atau $A \cdot B$ atau AB).

Contoh 2.17

1. Diketahui $A = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai dari AB.

   Jawab:

   $$A \times B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ maka } A_{(3 \times 1)} \times B_{(1 \times 3)} = C_{(3 \times 3)}$$

   $$C = \begin{bmatrix} -4(2) & -4(0) & -4(-1) \\ 3(2) & 3(0) & 3(-1) \\ 1(2) & 1(0) & 1(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Diketahui $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan AB.

   Jawab:

   $$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ maka } A_{(2 \times 3)} \times B_{(3 \times 2)}$$

   $$= C_{(2 \times 2)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2(0)+(-1)(-4)+3(2) & 2(1)+(-1)2+3(6) \\ 0(0)+4(-4)+5(2) & 0(1)+4(2)+5(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ -6 & 38 \end{bmatrix}$$

b. Pengertian "Dikalikan dari Kiri" dan "Dikalikan dari Kanan"

Dua buah matriks A dan B dapat dikalikan jika banyaknya kolom pada matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks yang kedua. Sedangkan untuk menjelaskan pengertian "dikalikan dari kiri" dan "dikalikan dari kanan". Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.18

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Tentukan:

a. Matriks A dikalikan dari kiri oleh matriks B.

b. Matriks A dikalikan dari kanan oleh matriks B.

Jawab:

a. A dikalikan dari kiri oleh $B = BA$.

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$$

b. A dikalikan dari kanan oleh $B = AB$.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -9 & 12 \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa $BA \neq AB$ (tidak berlaku sifat komutatif).

c. Matriks Satuan dan Sifatnya

Matriks satuan (matriks identitas I_n) adalah suatu matriks diagonal I_n yang nilai elemen-elemen pada diagonal utamanya sama dengan satu, sedangkan elemen lainnya nol.

Jadi, $AI = IA$.

Semua matriks jika dikalikan dengan matriks satuan, hasilnya matriks itu sendiri. Sehingga diperoleh sifat dari matriks satuan:

$AI = IA = A$

Contoh 2.19

Diketahui $I_{(2\times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Tentukan AI dan IA.

Jawab:

$$AI = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Pemangkatan Matriks Persegi

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ maka yang dimaksud:

$A^2 = A \times A$
$A^3 = A \times A \times A = A \times A^2$
$A^4 = A \times A \times A \times A = A \times A^3$
Demikian seterusnya.

Contoh 2.20

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, tentukan A^2 dan A^3.

Jawab:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -16 & 23 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -16 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 47 \\ -94 & 99 \end{bmatrix}$$

Latihan 2.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Diketahui: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   Tentukan hasil kali berikut.

   a. $A \times B$
   b. $A \times C$
   c. $B \times C$
   d. $A^t \times C$
   e. $B^t \times C$
   f. $C^t \times A$
   g. $C^t \times B$
   h. $A^t \times B^t$
   i. $B^t \times A^t$
   j. $(AB)^t$
   k. Apakah $(AB)^t = B^t \times A^t$?

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tentukan:

   a. A^2
   b. B^2
   c. $(AB)^2$
   d. $(BA)^2$
   e. Apakah $(AB)^2 = (BA)^2$?
   f. A^3
   g. B^3

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan A^2, A^3, A^4, dan A^n.

4. Tentukan a dan b dari persamaan berikut.

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -27 \\ 14 & -23 \end{bmatrix}$$

5. Tentukan p, q, r, dan s dari persamaan berikut ini.

   $$3\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 6 \\ -1 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & p+q \\ r+s & 2 \end{bmatrix}$$

6. Jika $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, tentukan $(x + y)$.

7. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Tentukan $(A + B)(A - B) - (A - B)(A + B)$.

8. Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan hasil berikut.

   a. $P + Q$
   b. $P - Q$
   c. $(P + Q)(P - Q)$
   d. $P^2 - Q^2$
   e. Apakah $(P + Q)(P - Q) = P^2 - Q^2$?

9. Diketahui $P = [1 \;\; 2]$ dan $Q = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tentukan hasil kali berikut.

   a. P^2
   b. Q^2
   c. Mengapa P^2 dan Q^2 tidak dapat dicari?
   d. PQ
   e. QP

10. a. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 3x - 4I$. Tentukan $f(A)$ jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

    b. Diketahui fungsi $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$; $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

    Tentukan:
    1) $f(A, B)$
    2) $f(B, A)$
    3) Apakah $f(A, B) = f(B, A)$?

D. Determinan Matriks Persegi Ordo 2

1. Determinan Matriks Ordo 2

Jika terdapat suatu matriks persegi misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh 2.21

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Hitunglah determinan matriks A dan B.

Jawab:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 - 3 \times 2 = -1$$

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3 \times 1) - (2 \times -5) = 7$$

Latihan 2.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan determinan dari matriks berikut.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} x & x \\ -3 & 2x \end{bmatrix}$

e. $E = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

f. $F = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

2. Tentukan hasil perkalian matriks berikut (kesimpulan apakah yang kalian peroleh?).

a. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & \frac{7}{3} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -3 & \frac{7}{3} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Tentukan p yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{vmatrix} 2p & p+1 \\ 3 & p+2\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$

b. $\begin{vmatrix} 2p & -3 \\ p-1 & p-1 \end{vmatrix} = 0$

4. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = -2$

b. $\begin{vmatrix} 2x-1 & -3 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} = 3$

5. Jika $A = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 3x-2 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ mempunyai determinan yang sama, tentukan nilai x.

6. Tentukan determinan matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Carilah bilangan x yang memenuhi $|A - xI| = 0$.

8. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$.

Jika determinan A = determinan B, tentukan x.

9. Tentukan x dari persamaan berikut ini.

a. $\begin{vmatrix} 6-x & 0 \\ 6 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

b. $\begin{vmatrix} -2x & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6$

10. Tentukan determinan dari matriks berikut.

a. $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b. $C + D = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Matriks Singular dan Matriks Nonsingular

Suatu matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jika nilai determinannya ($ad - bc$) sama dengan nol atau $ad - bc = 0$ maka matriks A dikatakan matriks *singular*.

Jika matriks A nilai determinannya ($ad - bc$) tidak sama dengan nol atau $ad - bc \neq 0$ maka matriks A dikatakan matriks nonsingular.

Contoh 2.22

Tentukan determinan matriks berikut dan apakah matriks tersebut singular atau nonsingular.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; det $A = 0$; matriks singular.

b. $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$; det $B = 31$; matriks nonsingular.

c. $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; det $C = 0$; matriks singular.

d. $D = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; det $D = -14$; matriks nonsingular.

Latihan 2.7

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Manakah yang merupakan matriks singular?

   a. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. Tentukan harga x bila matriks di bawah ini singular.

   a. $\begin{bmatrix} x & 9 \\ 1 & 3x \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2x^2 & x \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -x & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Matriks di bawah ini, manakah matriks nonsingular?

   a. $\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 40 & 3 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

E. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Determinan

Misalkan sistem persamaan linear dalam x dan y adalah:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

1. Menentukan Nilai x

$$\begin{array}{l|l|l} ax + by = p & \times d & adx + bdy = pd \\ cx + dy = q & \times b & bcx + bdy = qb \\ \hline & & (ad - bc)x = pd - qb \quad - \end{array}$$

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

Jadi, $\boxed{x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}}$

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ merupakan determinan utama dari koefisien x dan y.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$ merupakan determinan variabel x (menggantikan koefisien variabel x dari determinan utama dengan bilangan ruas kiri).

2. Menentukan Nilai y

$$\begin{array}{l|l|l} ax + by = p & \times c & acx + bcy = pc \\ cx + dy = q & \times a & acx + ady = qa \\ \hline & & (bc - ad)y = pc - aq \quad - \end{array}$$

$$y = \frac{pc - aq}{bc - ad} = \frac{aq - pc}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Jadi, $\boxed{y = \frac{\Delta_y}{\Delta}}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$ merupakan determinan variabel y (menggantikan koefisien variabel y dari determinan utama dengan bilangan ruas kanan)

Contoh 2.23

Tentukan himpunan penyelesaian dengan cara determinan dari:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ x + 4y = -5 \end{cases}$$

Jawab:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 52 - 10 = 42$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 13 = -28$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-28}{14} = -2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(3, -2)\}$.

Latihan 2.8

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan cara determinan.

   a. $\begin{cases} y = 3x - 6 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} 12x - 7y = 24 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$

2. Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan cara invers matriks dan determinan.

   a. $3x + 2y - 1 = 0$
      $x + y + 4 = 0$

   b. $2x - y = 0$
      $-7 = 0$

   c. $x + y + 1 = 0$
      $x - y - 3 = 0$

   d. $3x + y = 4$
      $14x + 4y = 20$

   e. $6(x + 1) - (y + 6) = 4x + 3y$
      $3(x + 1) - 2(y + 6) = 5$

F. Invers Matriks Persegi Ordo 2

1. Pengertian Dua Matriks yang Saling Invers

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar atau persegi berordo sama berlaku $AB = BA = I$ maka B disebut invers A (ditulis dengan $B = A^{-1}$) atau A adalah invers B (ditulis dengan $A = B^{-1}$).

Contoh 2.24

Apabila diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Apakah A merupakan invers dari B?

Jawab:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Karena $AB = BA = I$ maka A merupakan invers B atau B merupakan invers A.

2. Rumus Invers Matriks Berordo 2 × 2

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka invers dari matriks A adalah A^{-1} sehingga $A\,A^{-1} = I$. Determinan $A = ad - bc$. Jika nilai det $A \neq 0$ maka matriks A mempunyai invers (A^{-1}).

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. Menentukan Invers Matriks Berordo 2 × 2

Contoh 2.25

1. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   Jawab:

   $$A^{-1} = \frac{1}{(3 \times 2 - 4 \times 1)}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

2. Tentukan invers dari matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Jawab:

$$B^{-1} = \frac{1}{(-3-(-4))}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Latihan 2.9

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan invers dari matriks di bawah ini.

   a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

   c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   d. $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

   e. $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   f. $F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

   Tentukan hasil kali berikut ini.

   a. AB

   b. BA

   c. A^{-1}

   d. B^{-1}

   e. $A^{-1} B^{-1}$

   f. $B^{-1} A^{-1}$

   g. $(AB)^{-1}$

   h. $(BA)^{-1}$

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan operasi berikut.

   a. A^t

   b. A^{-1}

   c. $A^{-1} \times A^t$

   d. $A^t + 2A^{-1} \times A^t + A^{-1}$

   e. $(A^t + A^{-1})$

4. Jika $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$; P^{-1} adalah invers P dan P^t adalah matriks transpose P. Maka tentukan hasil operasi dari $P^{-1} - 2P^t + P$.

5. Tentukan invers dari $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $(M \circ A)$ didefinisikan sebagai $MA^{-1} + M^{-1}A$. Tentukan $(M \circ A)$ jika $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

7. $(A * B)$ didefinisikan sebagai $A^{-1} - AB + B^{-1}$. Tentukan $(A * B)$ jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   Tentukan:

   a. matriks invers $(A - B)$,

   b. matriks invers $(A + B)$, dan

   c. matriks invers (AB).

9. Jika $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan $(A^{-1})^2 - 2A\ A^{-1} + A^2$.

10. Jika $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan $(B^2)^{-1}$ dan $(B^{-1})^2$. Apakah $(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$? (B^{-1} adalah invers B)

G. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Invers Matriks

1. Menyelesaikan Soal yang Berkaitan dengan Invers Matriks

Contoh 2.26

Tentukan matriks A dari persamaan berikut.

a. $A\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

Jawab:

a. $A\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ ... (i)

Misalkan $P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ maka

$$P^{-1} = \frac{1}{4 \times 4 - 6 \times 2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan (i) kedua ruasnya dari kanan dikalikan dengan P^{-1}.

$$A \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ maka } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ ... (ii)

Misalkan $R = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$$R^{-1} = \frac{1}{4 \times 4 - 6 \times 2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan (ii) kedua ruasnya dari kiri dikalikan dengan R^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Latihan 2.10

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Carilah X dari persamaan berikut.

   a. $X \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$

   c. $X \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tentukan a, b, c, dan d.

3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a-b \\ a+2b \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} b \\ 2a \end{bmatrix}$.

   Jika $A \times B = C$, tentukan matriks B.

4. Tentukan a, b, c, dan d dari persamaan berikut.

   a. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Carilah X dari persamaan berikut.

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $X \times \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$

6. Jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan $A \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan A.

7. Tentukan a dan b jika $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

8. Diketahui A matriks ordo 3×3 dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan

   x, y, z agar memenuhi persamaan $A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

9. Diketahui $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan p, q, r, dan s.

10. X adalah matriks berordo 2×2, carilah X dari persamaan berikut.

    a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

    b. $X \times \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Sudut Matematika

Matriks memudahkan membuat analisis mengenai suatu masalah ekonomi yang mengandung bermacam-macam peubah. Matriks juga digunakan dalam memecahkan masalah operasi penyelidikan atau penelitian misalnya penyelidikan sumber minyak, kependudukan, dan lain-lain. Dalam program linear, analisis input-output baik dalam bidang ekonomi, statistika, maupun bidang pendidikan, manajemen kimia, dan bidang teknoligi lainnya.

Sumber: *e-dukasinet*

2. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Menggunakan Invers Matriks

Invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Contoh 2.27

Carilah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ dengan menggunakan invers matriks.

Jawab:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \ldots \text{(i)}$$

Misal $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ maka $\Delta_A = \det A = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Persamaan (i) dikalikan dari kiri oleh determinan A sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ maka } x = 2; y = 1$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(2, 1)\}$.

Latihan 2.11

Tentukan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan menggunakan invers matriks.

1. $\begin{cases} 5x + 3y = 9 \\ 7x + 6y = 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x = 5y + 7 \\ x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ -3x = 6 - 4y \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x - 2y - 5 = 4 \\ 2x + 6y + 1 = 0 \end{cases}$

Rangkuman

1. Matriks adalah susunan yang berbentuk persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom.
   Bilangan-bilangan itu disebut elemen matriks.
2. Ordo matriks ditentukan oleh banyaknya baris diikuti banyaknya kolom.
3. Dua matriks dikatakan sama jika ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak sama.
4. Matriks identitas *(I)* adalah matriks bujur sangkar atau persegi yang elemen-elemen diagonal utamanya adalah 1 dan elemen yang lainnya nol.
5. Jika A dan B dua matriks yang ordonya sama maka jumlah A dan B dinyatakan dengan $A + B$, dan pengurangan A dan B dinyatakan dengan $A - B$, adalah matriks yang didapat dengan menjumlahkan/mengurangkan setiap elemen A dengan elemen B yang bersesuaian.
6. Untuk mengalikan suatu matriks dengan suatu bilangan k maka setiap elemen matriks itu dikalikan dengan bilangan k tersebut.
7. Dua matriks $A_{(m \times n)}$ dikalikan dengan $B_{(n \times p)}$ maka hasil perkaliannya adalah $C_{(m \times p)}$.
   Aturannya: Kalikanlah "baris ke dalam kolom dan jumlahkan hasilnya".

8. Matriks singular adalah matriks yang nilai determinannya sama dengan nol. Sedangkan matriks nonsingular adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan nol.
9. Invers matriks (2×2).

   Invers matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

   dengan $ad - bc \neq 0$. $ad - bc$ dinamakan determinan matriks A.

   Jika det $A = 0$ maka matriks A tidak mempunyai invers, dinamakan matriks singular.

   Sifat: $A^{-1} A = AA^{-1} = I$
10. Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel

   $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

   dengan Δ adalah determinan utama dari koefisien x dan y

   Δ_x adalah determinan variabel x

   Δ_y adalah determinan variabel y

Tugas Kelompok

Dalam kehidupan sehari-hari, sering kalian jumpai persoalan seperti berikut.

Yudi dan Galih membeli keperluan alat-alat tulis di koperasi sekolahnya. Yudi membeli 5 buah buku tulis dan 2 buah pensil. Galih membeli 4 buah buku tulis dan 1 pensil. Harga sebuah buku tulis Rp2.500,00 dan harga sebuah pensil Rp1.000,00. Berapakah mereka harus membayar?

Selesaikan soal di atas dengan bentuk matriks.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, materi apakah yang kalian rasakan cukup sulit? Buatlah ringkasan tentang materi ini kemudian diskusikan dengan teman-teman kalian.

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Diketahui $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5p+q & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & q+3 \end{bmatrix}$ maka p dan q adalah ....
   a. $p = 1$ dan $q = -2$
   b. $p = 1$ dan $q = 2$
   c. $p = -1$ dan $q = 2$
   d. $p = 1$ dan $q = 8$
   e. $p = 5$ dan $q = 2$

2. Hasil kali dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ adalah ....
   a. $\begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 44 & 64 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 22 & 49 \\ 28 & 64 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 15 & 30 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 18 \\ 4 & 15 & 30 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 4 & 15 & 30 \end{bmatrix}$

3. Nilai x dari $\begin{bmatrix} 4x & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ....
   a. 14
   b. 10
   c. 13
   d. 25
   e. 0

4. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ maka $(A + B)^2$ sama dengan ....

a. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$

5. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Jika $A^2 = pA + qI$ maka nilai p dan q adalah ....

a. $p = 5$ dan $q = 2$

b. $p = 5$ dan $q = -2$

c. $p = -5$ dan $q = 2$

d. $p = 2$ dan $q = -5$

e. $p = 2$ dan $q = 5$

6. $A = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x \\ -2y & 3 \end{bmatrix}$. Jika $A^t = B$ maka nilai x adalah ....

a. 2

b. 1

c. 0

d. –1

e. –2

7. Jika $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan X adalah matriks ordo (2×2) maka X sama dengan ....

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

8. Jika $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$ maka nilai x dan y adalah ....
   a. $x = 1$ dan $y = -3$
   b. $x = 1$ dan $y = 3$
   c. $x = -3$ dan $y = -1$
   d. $x = -3$ dan $y = 1$
   e. $x = 3$ dan $y = 1$

9. Jika $M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ maka $|M|$ adalah ....
   a. -13
   b. -7
   c. 7
   d. 13
   e. 5

10. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{bmatrix}$. Jika $A = 2B^t$ maka nilai c adalah ....
    a. 2
    b. 3
    c. 5
    d. 8
    e. 10

11. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 3k+1 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Nilai k yang memenuhi A + B = C-1 adalah ....
    a. -1
    b. $\frac{1}{3}$
    c. $\frac{2}{3}$
    d. 1
    e. 3

12. Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$, dan P^t transpose dari P.

    Operasi yang dapat dilakukan pada P dan Q adalah ....
    a. $P + Q$ dan PQ
    b. P^tQ dan QP
    c. PQ dan QP
    d. PQ dan $Q^{-1}P$
    e. PQ dan QP^t

13. Hasil kali akar-akar persamaan $\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ adalah ....

a. $-\frac{2}{3}$
b. $-\frac{4}{3}$
c. $-\frac{5}{3}$
d. $\frac{2}{3}$
e. $\frac{4}{3}$

14. Jika $\begin{bmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{bmatrix}$ maka nilai y adalah ....

a. $y = 3x$
b. $y = 2x$
c. $y = x$
d. $y = \frac{x}{3}$
e. $y = \frac{x}{2}$

15. Jika $P = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{bmatrix}$ dan $P \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka $x - y$ adalah ....

a. $\frac{23}{2}$
b. $\frac{21}{2}$
c. $\frac{19}{2}$
d. $\frac{17}{2}$
e. $\frac{15}{2}$

16. Nilai a yang memenuhi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. –2
b. –1
c. 0
d. 1
e. 2

17. Diketahui: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ maka nilai $(AB)^{-1}$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

18. Jika invers matriks M adalah $M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, maka $M \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ adalah .....

a. $\begin{bmatrix} 3x-4y \\ -2x+y \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3x-4y \\ -2x+y \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3x+4y \\ -2x-y \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4x+3y \\ -x-2y \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -2x-y \\ 3x-4y \end{bmatrix}$

19. Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$. Jika $AP = B$ maka matriks P adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

20. Titik potong dari dua garis yang memenuhi persamaan matriks:

$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. (1, –2)
b. (–2, 2)
c. (–1, –2)
d. (1, 2)
e. (2, 1)

Latihan Semester 1

A. Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x \\ -2y & 3 \end{bmatrix}$ jika $A' = B$

   maka $x + 2y = ...$

   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

2. Jika x dan y memenuhi persamaan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$

   maka $x - y$ ....

   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5

3. Jika matriks X memenuhi $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, maka invers dari matriks X

   adalah $X^{-1} =$ ....

   a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

4. Jika $M\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$, maka matriks $M^2 = ...$

a. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 25 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 27 & -4 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 25 & -4 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 27 & -8 \\ -4 & 15 \end{bmatrix}$

5. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka nilai p yang memenuhi $|A - pI| = 0$ adalah ....

a. 7 dan –1

b. –7 dan 1

c. –6 dan –1

d. –5 dan 3

e. 5 dan 3

6. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan berlaku $A^2 = pA + qI$ maka $p + q = ...$

a. 15

b. 10

c. 5

d. –5

e. –10

7. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan $A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ maka $B = ...$

a. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. Jika $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ maka matriks $(P^t)^{-1}$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
d. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
e. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

9. Jika $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ maka $A^1 + A^{-1} = ...$

a. 20
b. 25
c. 30
d. 40
e. 45

10. Jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka $A^2 - 6A + 3I = ...$

a. $-8\,A$
b. $-10\,A$
c. $2\,A$
d. $4\,A$
e. $10\,A$

11. Persamaan matriks $\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ p & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 0$ mempunyai dua akar positif x_1 dan x_2. Jika $x_1 = 4x_2$ maka konstanta $p = ...$

a. -6
b. -4
c. -2
d. 4
e. 6

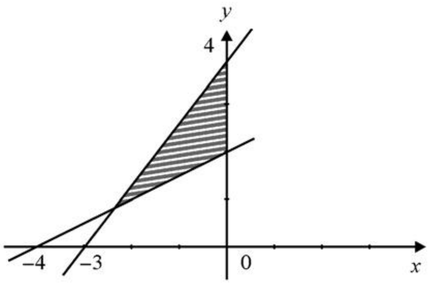
12. Nilai maksimum dari $F = 6x + 10y$ yang memenuhi $x + y \le 10$, $x + 2y \le 10$, $x \ge 2$, $y \ge 0$ adalah ....

a. 4
b. 6
c. 10
d. 12
e. 14

13. Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan $3x + y \leq 12$, $3x - 4y \leq 12$, $0 \leq x \leq 2$, $y \leq 0$ adalah daerah yang dibatasi oleh ....

a. segitiga siku-siku
b. segitiga samakaki
c. segitiga samasisi
d. trapesium samakaki
e. persegi panjang

14.



Pada gambar di samping yang diarsir memenuhi sistem pertidaksamaan ....

a. $y \geq 0, x \leq 0, 3y \geq 4x + 12, x - 2y \leq -4$
b. $x \leq 0, 3y \geq 4x + 12, x - 2y \geq -4$
c. $x \leq 0, 2y - x \geq 4, 3y \leq 4x + 12$
d. $x \leq 0, y \geq 0, 3y \leq 4x + 12, 2y - x \leq 4$
e. $y \geq 0, x \leq 0, 2y - x \geq 4, 3y \geq 4x + 12$

15. Fungsi $F = 10x + 15y$ dengan syarat $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 800$, $y \leq 600$ dan $x + y \leq 1.000$ mempunyai nilai maksimum ....

a. 9.000
b. 11.000
c. 13.000
d. 15.000
e. 16.000

16. Nilai maksimum dari $L = 2x + y$ yang memenuhi $x - y + 3 \geq 0$, $3x + 2y - 6 \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah ....

a. 0
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

17. Nilai minimum dari $K = 3x + 6y$ yang memenuhi syarat $4x + y \geq 20$, $x + y \geq 20$, $x + y \geq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah ....

a. 50
b. 40
c. 30
d. 20
e. 10

18. Nilai maksimum dari $f(x,y) = 500x + 300y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan

$$\begin{cases} 2x + y \le 1.500 \\ x + y \le 1.000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$ adalah ....

a. 300.000
b. 375.000
c. 400.000
d. 450.000
e. 500.000

19. Seorang pedagang menjual buah mangga dan pisang dengan menggunakan gerobak. Pedagang tersebut membeli mangga dengan harga Rp8.000,00/ kg dan pisang Rp6.000,00/kg. Modal yang tersedia Rp1.200.000,00 dan gerobaknya hanya dapat memeuat mangga dan pisang sebanyak 180 kg. Jika harga jual mangga Rp9.200,00/kg dan pisang Rp7.000,00/kg maka laba maksimum yang diperoleh adalah ....

a. Rp150.000,00
b. Rp180.000,00
c. Rp192.000,00
d. Rp204.000,00
e. Rp216.000,00

20. Perusahaan tas dan sepatu mendapat pasokan 8 unsur P dan 12 unsur K setiap minggu untuk produksinya. Setiap tas memerlukan 1 unsur P dan 2 unsur K dan setiap sepatu memerlukan 2 unsur P dan 2 unsur K. Laba untuk setiap tas Rp18.000,00 dan setiap sepatu Rp12.000,00. Keuntungan maksimum perusahaan yang diperoleh adalah ....

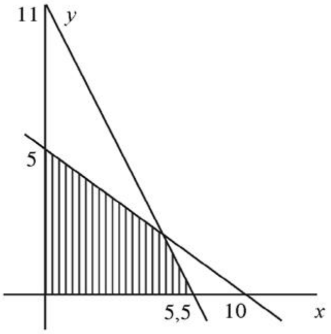
a. Rp120.000,00
b. Rp108.000,00
c. Rp96.000,00
d. Rp84.000,00
e. Rp72.000,00

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar.

1. Tentukan matriks A yang memenuhi persamaan $A\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 30 \\ 35 & -27 \end{bmatrix}$.

2. Diketahui persamaan matriks $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ s & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Tentukan nilai $p + q + r + s$.

3. Tentukan nilai maksimum dari $z = 4x + 9y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan $x + 2y \leq 12$, $2x + y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
4. Sebuah pabrik menggunakan bahan A, B, dan C untuk memproduksi 2 jenis barang. Sebuah barang jenis 1 memerlukan 1 kg bahan A, 3 kg bahan B, dan 2 kg bahan C. Sedangkan untuk sebuah barang jenis II memerlukan 3 kg bahan A, 4 kg bahan B, dan 1 kg bahan C. Bahan baku yang tersedia 480 kg bahan A, 720 kg bahan B, dan 360 kg bahan C. harga barang jenis I Rp40.000,00 per buah dan jenis II Rp60.000,00. Tentukan pendapatan maksimum yang diperoleh.
5. 

Daerah yang diarsir pada gambar di samping merupakan himpunan penyelesaian dari suatu progam linear. Tentukan nilai maksimumnya untuk $3x + 4y$.

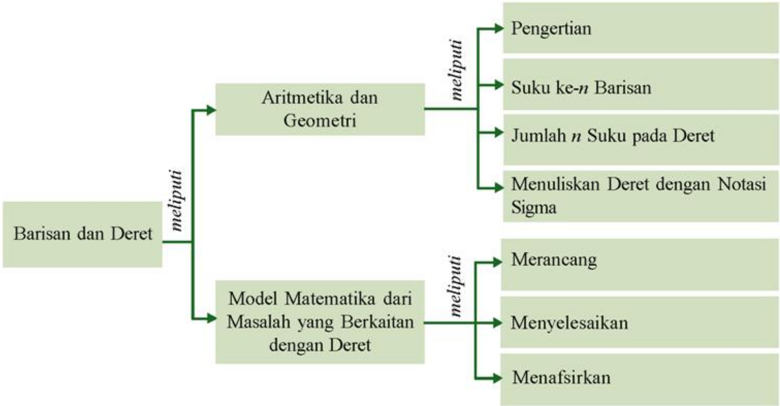
Bab 3

Barisan dan Deret

Jika kita perhatikan rumah-rumah yang menghadap jalan raya maka tampak bahwa rumah-rumah itu diberi nomor secara teratur, misalnya rumah di seberang jalan raya diberi nomor ganjil dan rumah di seberang lainnya diberi nomor genap. Cara ini memudahkan kita untuk mencari nomor rumah tertentu apabila kita telah mengetahui beberapa nomor rumah pada bagian yang sama.

Setelah mempelajari bab ini diharapkan kalian dapat menentukan suku ke-n barisan dan jumlah n suku deret aritmatika dan geometri, serta memecahkan masalah yang berkaitan dengan deret dan menafsirkan solusinya.

Peta konsep berikut untuk lebih mudah mempelajari materi **Barisan dan Deret** pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Barisan
2. Deret
3. Notasi Sigma
4. Rasio
5. Beda

Nomor rumah itu, misalnya dengan nomor ganjil 1, 3, 5, 7, … dan nomor genap 2, 4, 6, 8, ... Nomor-nomor rumah yang demikian merupakan contoh dari barisan aritmetika.

Bila sehelai kertas dilipat menjadi dua, kemudian lipatan itu dilipat lagi menjadi dua demikian seterusnya, dan lipatan-lipatan itu digunting terjadilah barisan bilangan 1, 2, 4, 8, 16, …. Barisan ini merupakan salah satu contoh barisan geometri. Pelajari kembali materi barisan dan deret pada kelas IX untuk memperdalam materi pada bab ini.

A. Ciri Barisan Aritmetika dan Barisan Geometri

1. Barisan Aritmetika

Perhatikan barisan aritmetika 1, 3, 5, 7, ... dan 2, 4, 6, 8, ...; setiap selisih antara dua suku yang berurutan adalah tetap nilainya, yaitu

$3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = ... = 2$

$4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = ... = 2$

Secara umum $u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_n$ adalah barisan aritmetika apabila

$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = ... = u_n - u_{n-1} = konstanta.$

Konstanta ini disebut *beda* dan dinyatakan dengan b. Pada setiap barisan aritmetika berlaku sebagai berikut.

$u_n - u_{n-1} = b$ dengan u_n adalah suku ke-n

Jadi, ciri barisan aritmetika adalah mempunyai beda yang tetap.

a. Rumus untuk Suku ke-*n*

Jika suku pertama barisan aritmetika u_1 dinamakan a dan bedanya b maka diperoleh:

$u_1 = a = a + (1 - 1)b$

$u_2 - u_1 = b \Leftrightarrow u_2 = u_1 + b = a + b = a + (2 - 1)b$

$u_3 - u_2 = b \Leftrightarrow u_3 = u_2 + b = a + b + b = a + 2b = a + (3 - 1)b$

$u_4 - u_3 = b \Leftrightarrow u_4 = u_3 + b = a + 2b + b = a + 3b = a + (4 - 1)b$

$u_5 - u_4 = b \Leftrightarrow u_5 = u_4 + b = a + 3b + b = a + 4b = a + (5 - 1)b$

dan seterusnya.

Besarnya suku ke-n barisan aritmetika dengan melihat pola di atas adalah:

$$u_n = a + (n - 1)b$$

dengan u_n adalah besar suku ke-n
a adalah suku pertama
b adalah beda

Contoh 3.1

1. Carilah tiga suku berikutnya dari barisan aritmetika 1, 4, 7, 10, ...
   Jawab:
   $u_1 = a = 1$, $u_2 = 4$
   $b = u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$
   Tiga suku berikutnya adalah $10 + 3 = 13$, $13 + 3 = 16$, $16 + 3 = 19$.
2. Suatu barisan aritmetika diketahui suku kelima adalah 21 dan suku kesepuluh adalah 41, tentukan besarnya suku kelima puluh.
   Jawab:
   $$u_n = a + (n - 1)b \Leftrightarrow \begin{array}{r} u_{10} = a + 9b = 41 \\ u_5 = a + 4b = 21 \\ \hline 5b = 20 \\ b = 4 \end{array} -$$
   $$\begin{aligned} u_{50} &= a + (50 - 1) \cdot 4 \\ &= 5 + 49 \cdot 4 = 5 + 196 \\ u_{50} &= 201 \end{aligned}$$
   Jadi, besarnya suku kelima puluh adalah 201.

b. Rumus Jumlah n Suku Deret Aritmetika

Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + u_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Bila $u_n = k$ maka $u_{n-1} = k - b$
$u_{n-2} = k - 2b$ dan seterusnya sehingga diperoleh:

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (k-b) + k$$
$$S_n = k + (k-b) + (k-2b) + \ldots + (a+b) + a$$
$$2S_n = \underbrace{(a+k) + (a+k) + (a+k) + \ldots + (a+k) + (a+k)}_{n\ suku}$$

$$2S_n = n\,(a+k)$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a+k)$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a+u_n) \text{ karena } u_n = a + (n-1)b \text{ maka}$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)b) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \text{ (terbukti)}$$

Contoh 3.2

1. Hitunglah jumlah deret aritmetika dari $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$ sampai 50 suku.

   Jawab:

   $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$ sampai 50 suku

   Suku pertama $a = 2$, $b = 3$, $n = 50$.

   $$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$
   $$S_{50} = \frac{50}{2}(4 + 49 \times 3) = 25\,(4 + 147) = 25 \cdot 151$$
   $$S_{50} = 3.775$$

2. Tentukan jumlah sepuluh suku pertama suatu deret aritmetika jika diketahui suku ketiga adalah 9, dan jumlah suku kelima dan suku ketujuh adalah 36.

   Jawab:

   $$\begin{aligned}
   & u_3 = 9 \\
   \Leftrightarrow\ & a + 2b = 9 \ldots \text{(i)} \\
   & u_5 + u_7 = 36 \\
   \Leftrightarrow\ & (a + 4b) + (a + 6b) = 36 \\
   & 2a + 10b = 36 \\
   & a + 5b = 18 \ldots\ldots\text{(ii)} \\
   & a + 2b = 9 \ \ldots\ldots\text{(i)} \quad - \\
   & 3b = 9 \\
   & b = 3 \\
   & a + 2b = 9 \ldots \text{(i)} \\
   \Leftrightarrow\ & a + 6 = 9 \\
   & a = 3
   \end{aligned}$$

$S_n \;= \dfrac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

$S_n \;= \dfrac{10}{2}\;(6 + 9 \times 3) = 5\;(6 + 27)$

$S_{10} \;= 5 \times 33 = 165$

Jadi, jumlah sepuluh suku pertamanya adalah S_{10} yaitu 165.

3. Tentukanlah besarnya suku ke-25 suatu deret aritmetika jika diketahui $S_n = \dfrac{1}{2}(2n + 7)$.

Jawab:

$S_n \;= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$

$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$

$$\boxed{S_n - S_{n-1} = u_n}$$

Jadi, untuk setiap deret berlaku $S_n - S_{n-1} = u_n$.

$S_n \;= \dfrac{n}{2}(2n + 7) = \dfrac{1}{2}(2n^2 + 7n)$

$S_{n-1} = \dfrac{1}{2}(2(n-1)^2 + 7(n-1)) = \dfrac{1}{2}(2(n^2 - 2n + 1) + 7n - 7)$

$\quad\;\; = \dfrac{1}{2}(2n^2 + 3n - 5)$

$u_n \;= S_n - S_{n-1} = \dfrac{1}{2}(2n^2 + 7n) - \dfrac{1}{2}(2n^2 + 3n - 5)$

$\quad\;\; = \dfrac{1}{2}(2n^2 + 7n - 2n^2 - 3n + 5)$

$u_n \;= \dfrac{1}{2}(4n + 5)$

$u_{25} \;= \dfrac{1}{2}(4 \times 25 + 5)$

$\quad\;\; = \dfrac{1}{2} \times 105 = 52\dfrac{1}{2}$

Latihan 3.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Carilah beda dalam setiap barisan aritmetika berikut.
   a. 3, 7, 11, 15, ….
   b. – 4, 2, 8, 14, ….
   c. 11, $12\frac{1}{2}$, 14, $15\frac{1}{2}$, ….
   d. $7\frac{1}{2}$, 5, $2\frac{1}{2}$, 0, ….
   e. 80, 85, 90, 95, ….
   f. 2, 11, 20, 29, ….
2. Carilah tiga suku pertama dari barisan aritmetika bila diketahui berikut.
   a. $u_1 = 7$, $b = 5$
   b. $u_1 = -2$, $b = -3$
   c. $u_4 = 100$, $b = 25$
   d. $u_3 = 20$, $b = 15$
   e. $u_1 = 10$, $u_4 = 85$
   f. $u_2 = 15$, $u_5 = 33$
3. Barisan $(2k + 25)$; $(-k + 9)$; $(3k + 7)$ merupakan suatu barisan aritmatika. Tentukan jumlah 5 suku yang pertama.
4. Suku kesepuluh barisan aritmetika adalah 41. Jika suku ketujuhnya adalah 29, tentukan suku pertama dan bedanya.
5. Suku kelima belas barisan aritmetika adalah 50. Jika suku kedua puluh adalah 65, tentukan besar suku kedelapan.
6. Dari suatu barisan aritmetika $u_2 + u_7 = 26$ dan $u_5 + u_3 = 22$. Tentukan besarnya suku kesepuluh.
7. Tiga bilangan membentuk barisan aritmatika yang jumlahnya 36 dan hasil kalinya 1.536. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
8. Tiga bilangan membentuk barisan aritmatika jumlah ketiga bilangan itu 75, sedangkan selisih kuadrat bilangan ketiga dan kuadrat bilangan pertama 700. Tentukan ketiga bilangan itu.
9. Jika suku pertama suatu deret aritmatika adalah 5 dan suku terakhir adalah 23, selisih suku ke-8 dan suku ke-3 adalah 10. Tentukan banyaknya suku dalam deret tersebut.
10. Suku ke-6 suatu barisan aritmatika adalah 24.000 dan suku ke-10 adalah 18.000, tentukan n supaya suku ke-n sama dengan 0.
11. Carilah jumlah setiap deret aritmetika berikut.
    a. 1 + 4 + 7 + 10 + … sampai 30 suku.
    b. 5 + 8 + 11 + 14 + … sampai 20 suku.
    c. 50 + 47 + 44 + 41 + ... sampai 15 suku.
    d. – 7 – 11 – 14 – 17 – … sampai 25 suku.

12. Hitunglah banyaknya suku dan jumlah deret aritmetika berikut.
    a. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$
    b. $5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + 93$
    c. $100 + 95 + 90 + \ldots + 5$
    d. $-10 - 13 - 16 - \ldots - 97$
13. Hitunglah x dari deret berikut ini.
    a. $1 + 2 + 3 + \ldots + x = 210$
    b. $2 + 4 + 6 + \ldots + x = 930$
14. Tentukan banyaknya suku dari deret berikut.
    a. $75 + 70 + 65 + 60 + \ldots = 0$
    b. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots = 529$
    c. $84 + 80\frac{1}{2} + 77 + \ldots = 0$
15. Suatu deret aritmetika diketahui suku pertamanya 3 dan suku keduanya 5. Jika suku ke-n = 41, hitunglah n dan S_n.
16. Hitung a dan n suatu deret aritmetika dengan $S_n = 1.000$, $u_n = 420$, dan $b = 110$.
17. Suatu deret aritmetika jumlah n suku pertamanya dinyatakan sebagai $S_n = (3n^2 + 5)$, tentukanlah rumus umum suku ke-n, suku pertama, dan bedanya.
18. Hitung jumlah bilangan-bilangan bulat yang memenuhi berikut ini.
    a. Antara 1 dan 100 yang habis dibagi 6.
    b. Antara 100 dan 1.000 yang habis dibagi 4.
    c. Antara 1 dan 250 yang merupakan bilangan ganjil.
    d. Antara 1 dan 200 yang habis dibagi 5 tetapi tak habis dibagi 4.
19. Suatu perusahaan mulai berproduksi pada tahun pertama dengan hasil 10.000 unit barang. Jika tiap tahun mengalami penurunan produksi 200 unit, pada tahun ke berapa perusahaan itu memproduksi lagi?
20. Jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah $S_n = \frac{n}{2}(3n - 5)$.

    Tentukan berikut ini.
    a. Rumus umum suku ke-n.
    b. Bedanya.
    c. n bila $S_n = 39$.

2. Barisan Geometri

Bila kita perhatikan pada barisan 1, 2, 4, 8, …, setiap perbandingan dua suku yang berurutan adalah tetap harganya, yaitu:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \cdots = 2$$

Secara umum $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ adalah barisan geometri bila $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots. = \frac{u_n}{u_{n-1}}$ = konstanta.

Konstanta ini disebut rasio (perbandingan) dan dinyatakan dengan r.

Pada setiap barisan geometri berlaku: $\boxed{\frac{u_n}{u_{n-1}} = r}$

Jadi, ciri barisan geometri adalah mempunyai rasio yang tetap.

a. Rumus Suku ke-*n*

Jika suku pertama barisan geometri u_1 dinamakan a dan rasionya atau perbandingannya r maka diperoleh:

$u_1 = a = ar^{1-1}$

$\frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow u_2 = u_1 r = ar = ar^{2-1}$

$\frac{u_3}{u_2} = r \Leftrightarrow u_3 = u_2 r = arr = ar^2 = ar^{3-1}$

$\frac{u_4}{u_3} = r \Leftrightarrow u_4 = u_3 r = ar^2 r = ar^3 = ar^{4-1}$

$\frac{u_5}{u_4} = r \Leftrightarrow u_5 = u_4 r = ar^3 r = ar^4 = ar^{5-1}$ dan seterusnya.

Besarnya suku ke-n barisan geometri dengan melihat pola di atas adalah sebagai berikut.

$\boxed{u_n = ar^{n-1}}$ dengan u_n adalah besar suku ke-n
a adalah suku pertama
r adalah rasio (perbandingan)

Contoh 3.3

1. Tentukan rumus umum suku ke-n barisan 16, 8, 4, 2, …, dan tentukan suku ke-20.

Jawab:

$a = 16, r = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$u_n = ar^{n-1}$

$= 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 2^4(2^{-1})^{n-1}$

$= 2^4(2)^{-n+1}$

$u_n = 2^{5-n}$

Rumus suku ke-n dari barisan 16, 8, 4, 2, ... adalah $u_n = 2^{5-n}$.

Jadi, $u_{20} = 2^{5-20}$

$= 2^{-15}$

$= \frac{1}{2^{15}}$

$= \frac{1}{32.768}$

Sudut Matematika

Fibonacci mendapatkan barisan fibbonaci dari pengalamannya tentang kelinci. Kelinci memiliki siklus untuk mencari pasangan pada umur satu bulan, dan memiliki anak pada bulan berikutnya. Sebagai ilustrasi, pada akhir bulan ketiga, jumlah kelinci menjadi tiga pasang, dengan tambahan satu pasang dari kelinci yang pertama.

Sumber: *www.mate-mati-kaku.com*

2. Suku ketiga barisan geometri adalah 4, sedangkan besarnya suku kesembilan adalah 256. Tentukan besarnya suku kedua belas jika semua suku-sukunya positif.

Jawab:

$u_3 = 4$

$\Leftrightarrow ar^2 = 4$

$u_9 = 256$

$\Leftrightarrow ar^8 = 256$

$\frac{ar^8}{ar^2} = \frac{256}{4}$ maka $r^6 = 64 = 2^6$ sehingga $r = 2$

$u_3 = 4$

$\Leftrightarrow ar^2 = 4$

$\Leftrightarrow a(2)^2 = 4$

$\Leftrightarrow a = 1$

$u_{12} = ar^{12-1}$

$\Leftrightarrow u_{12} = 1 \times (2)^{11}$

$\Leftrightarrow u_{12} = 2.048$

b. Rumus untuk Jumlah *n* Suku Deret Geometri

Bentuk umum barisan geometri adalah $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$. Bila suku-suku dari suatu barisan geometri dijumlahkan, maka terjadilah deret geometri. Adapun rumus jumlah n suku pertama dari deret geometri dinyatakan sebagai S_n yang dapat dicari sebagai berikut.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$$
$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$
$$rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$
$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$S_n(a - r) = a(1 - r^n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1} \quad \text{atau} \quad \boxed{S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r > 1}$$

S_n adalah jumlah n suku pertama deret geometri

a adalah suku pertama

r adalah rasio

Contoh 3.4

1. Hitunglah nilai n agar jumlah deret $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n = 510$.

   Jawab:

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \Leftrightarrow 510 = \frac{2(2^n-1)}{2-1}$$
$$\Leftrightarrow 255 = 2^n - 1$$
$$\Leftrightarrow 2^n = 256 = 2^8$$
$$\Leftrightarrow n = 8$$

   Jadi, $n = 8$.

2. Hitung jumlah deret $1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + ...$ sampai sepuluh suku.

   Jawab:

   $a = 1, r = \sqrt{3}, n = 10$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{1\left((\sqrt{3})^{10} - 1\right)}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{10} - 1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{3^5 - 1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{242(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= 121\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

Latihan 3.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Carilah rasio untuk setiap barisan geometri berikut.
   a. 2, 4, 8, 16, ….
   b. 100, 25, $\frac{25}{4}$, $\frac{25}{6}$, ….
   c. 1, –1, 1, –1, ….
   d. $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}$, ….
   e. 12, 6, 3, $1\frac{1}{2}$, ….
2. Tentukan empat suku pertama barisan geometri dengan rumus suku ke-n berikut.
   a. $u_n = 4^{n-1}$
   b. $u_n = 3(-3)^{1-n}$
   c. $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
3. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan geometri berikut.
   a. 1, 3, 9, 27, ….
   b. 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ….
   c. $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, ….
   d. 2, –6, 18, –54, ….
   e. 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, ….
   f. 3, –12, 48, –192, ….
4. Carilah suku yang diminta dalam setiap barisan geometri di bawah ini.
   a. 2, 6, 18, …, u_5
   b. 225, 75, 25, …, u_6
   c. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, …, u_{10}
   d. 100, –110, 121, …, u_{15}
5. Sebuah barisan geometri diketahui $u_1 + u_6 = 244$, dan $u_3 \cdot u_4 = 243$, tentukan rasionya.

6. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengahd itambah 4 maka terbentuk sebuah barisan aritmatika yang jumlahnya 30. Tentukan hasil kali ketiga bilangan tersebut.
7. Suatu barisan geometri diketahui $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ dan $u_1 u_2 u_3 = -216$. Tentukan u_3.
8. Satu jenis bakteri setelah satu detik akan membelah diri menjadi dua. Jika pada saat permulaan ada 5 bakteri, setelah berapa detik bakteri tersebut menjadi 320?
9. Suatu barisan geometri diketahui suku ke-5 adalah 25 dan suku ke-7 adalah 625. Tentukan suku ke-3 barisan tersebut.
10. Jumlah n suku pertama suatu deret geometri ditentukan oleh $S_n = 2^{n+2} - 4$. Tentukan rasio deret tersebut.
11. Hitunglah jumlah deret geometri berikut.
    a. $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ sampai 8 suku.
    b. $2 + 6 + 18 + \ldots$ sampai 6 suku.
    c. $36 + 12 + 4 + \ldots$ sampai 7 suku.
    d. $1 - 3 + 9 - 27 + \ldots$ sampai 6 suku.
    e. $1 + x + x^2 + \ldots$ sampai n suku.
    f. $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ sampai n suku.
12. Hitunglah jumlah deret geometri berikut.
    a. $2 + 4 + 8 + \ldots + 512$
    b. $243 + 81 + 27 + \ldots + \frac{1}{3}$
    c. $1 + 5 + 25 + \ldots + 3.125$
13. Carilah jumlah deret $1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + \ldots + 1{,}1^{10}$.
14. a. Hitunglah S_{10} dari suatu deret geometri dengan $u_9 = 128$ dan $u_4 = -4$.
    b. Suatu deret geometri rumus suku ke-n ditentukan oleh $u_n = 2 \times 3^{n-1}$. Tentukan jumlah 6 suku pertamanya.
15. Untuk $k > 0$, bilangan $(k - 2)$; $(k - 6)$ dan $(2k + 3)$ membentuk tiga suku pertama suatu deret geometri. Tentukan jumlah n suku pertama deret tersebut.
16. Suku pertama dan suku keempat suatu deret geometri berturut-turut adalah 2 dan $\frac{1}{4}$.Tentukan jumlah enam suku pertama deret tersebut.

17. $(x - 50)$; $(x - 14)$; $(x - 5)$ adalah tiga suku pertama suatu deret geometri tentukan jumlah 6 suku pertama.
18. Jika suatu deret geometri diketahui $u_1 = 2$ dan $S_{10} = 33S_5$. Tentukan S_6.
19. Jumlah 5 suku pertama sebuah deret geometri adalah –33. Jika rasionya –2 tentukan jumlah suku ke-3 dan ke-4.
20. Tiga buah bilangan merupakan suku-suku berurutan suatu deret aritmatika. Selisih bilangan ketiga dengan bilangan pertama adalah 6. Jika bilangan ketiga ditambah 3 maka ketiga bilangan tersebut merupakan deret geometri. Tentukan jumlah lima bilangan pertama.

B. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri yang banyak suku-sukunya tak hingga disebut deret geometri tak hingga yang dituliskan:

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$

dengan $a = u_1$ adalah suku pertama

r adalah rasio

Jumlah n suku pertama dari deret geometri adalah:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \; -1 < r < 1$$

Jika $n \to \infty$ maka $S_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

1. Jika $|r| > 1 \Leftrightarrow r < -1$ atau $r > 1$ maka:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} - (-\infty)$$

$= \infty$ (disebut deret divergen), berarti tidak mempunyai limit jumlah.

2. Jika $|r| < 1 \Leftrightarrow -1 < r < 1$ maka:

$$\lim_{n\to\infty} = r^n = 0$$

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} - 0 \cdot \frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Jadi, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, $-1 < r < 1, r \neq 0$ merupakan deret konvergen.
Sehingga ciri deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah jika $-1 < r < 1$.

Contoh 3.5

1. Hitunglah limit jumlah dari deret geometri tak hingga:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots.$$

Jawab:

$$a = 1 \Leftrightarrow r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

2. Suatu deret:

$1 + (1 + 2x) + (1 + 2x)^2 + \ldots.$
Tentukan x supaya deret tersebut konvergen.

Jawab:
Rasio $(r) = 1 + 2x$
Supaya konvergen, syarat: $-1 < r < 1$
$-1 < 1 + 2x < 1$
$-2 < 2x < 0$
$-1 < x < 0$
Jadi, supaya menjadi deret konvergen maka x yang memenuhi adalah $-1 < x < 0$.

Latihan 3.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Hitunglah limit jumlah dari deret geometri tak hingga berikut.

   a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$

   b. $8 - 4 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + ...$

   c. $2 + \sqrt{2} + 1 + ...$

   d. $16 - 9 + 8 - 3 + 4 - 1 + ...$

   e. $9 + 8 + 3 + 4 + 1 + 2 + ...$

2. Tentukan batas p supaya deret berikut konvergen.

   a. $p^2 + \frac{p^3}{8} + \frac{p^4}{64} + ...$

   b. $p^2 + \frac{p^4}{9} + \frac{p^6}{81} + ...$

   c. $(p-2)+(p-2)^2+(p-2)^3 + ...$

3. Sebuah bola tenis dijatuhkan dari ketinggian 3 m. Setiap kali memantul mencapai ketinggian $\frac{2}{3}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukan panjang lintasan yang ditempuh bola sampai berhenti memantul.
4. Tentukan nilai x supaya jumlah tak hingga deret geometri:

   $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + ... = 10.$
5. Jumlah semua suku-suku suatu deret geometri tak hingga adalah 6, sedangkan jumlah suku-suku yang bernomor genap adalah 2. Tentukan suku pertama deret tersebut.
6. Tentukan suku pertama deret geometri supaya jumlah tak hingga deret tersebut 12 dan rasionya $\frac{2}{3}$.
7. Jika $(x-1)$; $(x-1)^2$; $(x-1)^3$ ... konvergen (jumlahnya ada) tentukan x.
8. Jika $(k-50)$; $(k-14)$; $(k-5)$ adalah tiga suku deret geometri tak hingga tentukan jumlah semua suku-sukunya.

9. Jika julah tak hingga dari a + 1 + $\frac{1}{a}$ + $\frac{1}{a^2}$ + ... adalah 4a tentukan a.

10. Tentukan nilai x apabila diketahui bilangan: $\frac{x-1}{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x(x-1)}, \ldots$ mempunyai limit jumlah.

C. Menuliskan Suatu Deret Aritmetika dan Geometri dengan Notasi Sigma

Suatu cara singkat untuk menyatakan bentuk penjumlahan adalah dengan menggunakan notasi Σ (dibaca: sigma), yaitu merupakan huruf besar Yunani dari huruf S yang merupakan huruf pertama dari kata "SUM" yang berarti jumlah.

Bila $x_1 + x_2 + ... + x_n$ merupakan jumlah bilangan-bilangan maka jumlah tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

dengan k adalah indeks penjumlahan
1 adalah batas bawah
n adalah batas atas
$\{1, 2, ..., n\}$ adalah daerah penjumlahan

Indeks penjumlahan yang digunakan pada notasi sigma adalah sembarang huruf, biasanya dipilih huruf kecil dan daerah penjumlahan dapat terhingga (terbatas) dan dapat pula tak terhingga (tak terbatas).

Bila batas bawahnya a, batas atasnya b maka a dan b harus bilangan bulat dengan $a \leq b$. Batas bawah penjumlahan tidak harus dimulai dengan 1 (angka satu).

Bila batas bawah penjumlahan 1 dan batas atasnya n maka penjumlahan itu terdiri atas n suku, sedangkan bila batas bawah penjumlahan r dan batas atasnya n maka penjumlahan terdiri atas $n - r + 1$ suku.

Suatu deret tertentu dapat ditulis dalam bentuk notasi sigma dengan cara mencari rumus suku ke-n dari deret tersebut.

Contoh 3.6

1. Tulis dalam bentuk notasi sigma.
   a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$
   b. $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22$
   c. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$
   d. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

   Jawab:

   a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ merupakan deret aritmetika dengan $a = 1$ dan $b = 2$.
   $u_n = a + (n - 1)b$ maka $u_n = 2n - 1$
   Jadi, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \sum_{n=1}^{8}(2n-1)$.

   b. $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22$ merupakan deret aritmetika dengan $a = 2$ dan $b = 4$.
   $u_n = a + (n - 1)b$ maka $u_n = 2 + (n - 1)4$
   $= 4n - 2$
   Jadi, $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 = \sum_{n=1}^{6}(4n-2)$.

   c. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ merupakan barisan geometri dengan $a = 1$ dan $r = 2$.
   $u_n = ar^{n-1}$ maka $u_n = 1 \times (2)^{n-1} = 2^{n-1}$
   Jadi, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \sum_{n=1}^{6} 2^{n-1}$.

   d. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ merupakan barisan geometri dengan $a = 1$ dan $r = \frac{1}{3}$.

   $$u_n = ar^{n-1}$$
   $$\Leftrightarrow u_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
   $$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

   Jadi, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

2. Tentukan bentuk berikut dalam notasi sigma.
   a. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$
   b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9}$
   c. $x + x^2y + x^3y^2 + x^4y^3$

   Jawab:

   a. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = \sum_{n=1}^{7} 2^n$
   b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} = \sum_{n=1}^{8} \frac{n}{n+1}$
   c. $x + x^2y + x^3y^2 + x^4y^3 = \sum_{n=1}^{4} x^n y^{n-1}$

3. Sebuah bola pingpong dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 2 m. setiap kali setelah bola itu memantul ia mencapai ketinggian tiga perempat dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Tentukan panjang lintasan bola tersebut sampai bola tersebut berhenti.

   Jawab:

$$\text{Panjang lintasan } = 2 + \left\{ 2\left(2\times\frac{3}{4} + 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots \right) \right\}$$

$$= 2 + 2\left(\frac{a}{1-r}\right)$$

$$= 2 + 2\left(\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= 2 + 2\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}\right) = 2 + 12 = 14$$

Jadi panjang lintasan bola pingpong sampai berhenti = 14 m.

Latihan 3.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tulislah jumlah-jumlah berikut dalam notasi sigma.
   a. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + (n - 1) + n$
   b. $1 + 8 + 27 + ... + 1.000$
   c. $6 + 24 + 60 + 120 + ... + 720$
   d. $a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9$
   e. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \; ... \; + \frac{1}{729}$
   f. $1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \; ... \; + \frac{2}{20}$
2. Tulislah jumlah soal berikut dalam notasi sigma.
   a. $3 + 4 + 5 + ... + n$
   b. $3 + 8 + 15 + ... + 255$
   c. $1 + 3 + 6 + 10 + ... + 630$
   d. $a^2 + a^3b + a^4b^2 + a^5b^3 + a^6b^4 + a^7b^5$
   e. $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + ab^{n-1} + b^n$
   f. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \; ... \; + \frac{1}{1.024}$

D. Merancang dan Menyelesaikan Serta Menafsirkan Solusi Model Matematika dari Masalah yang Berkaitan dengan Deret

Masalah dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai yang penyelesaiannya menggunakan rumus deret aritmetika atau geometri.

Contoh 3.7

1. Cecep menyimpan uang di koperasi sebesar Rp5.000.000,00. Koperasi memberi bunga tetap sebesar 1% setiap bulan.
   Berapakah jumlah uang Cecep setelah 10 bulan?

Jawab:

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

a. Menjelaskan karakteristik masalah.
   Oleh karena masalah di atas bunganya tetap (penambahan tetap), maka model matematikanya berbentuk deret aritmetika.

b. Merumuskan model matematika.
   Uang Cecep mula-mula M_1= Rp5.000.000,00.
   Bunga $(b) = \frac{p}{100} \times M_1 = \frac{1}{100} M_1 \ (b = 50.000)$.
   Setelah 1 bulan = $M_2 = M_1 + b$.
   Setelah 2 bulan = $M_3 = M_2 + b = M_1 + 2b$.
   Setelah 3 bulan = $M_4 = M_3 + b = M_1 + 3b$.
   Setelah 10 bulan = $M_{11} = M_1 + 10b$.
   Apabila uang semula ditulis sebagai $u_1 = a$ dan uang setelah 10 bulan ditulis sebagai u_{11} maka:
   $u_{11} = a + 10b$ atau
   $u_{11} = a + (11 - 1)b$
   Jadi, rumus yang digunakan adalah $u_n = a + (n - 1)b$.

c. Menentukan penyelesaian dari model matematikanya.
   Dari contoh di atas diperoleh:
   $u_n = a + (n - 1)b$
   $u_{11} = 5.000.000 + (11 - 1)\ 50.000$
   $u_{11} = 5.500.000$

d. Memberikan tafsiran terhadap hasil yang diperoleh.
   Jadi, uang Cecep setelah disimpan di koperasi selama 10 bulan dengan bunga tetap menjadi Rp5.500.000,00.

2. Laju pertumbuhan produksi sepatu di perusahaan KUSUMA setiap 6 bulan bertambah 2 kali lipat dari produksi sebelumnya.
   Apabila pada awal berdirinya tahun 2000 dapat memproduksi 200 pasang sepatu, berapakah jumlah sepatu yang diproduksi perusahaan tersebut setelah 10 tahun?

   Jawab:

   a. Menjelaskan karakteristik masalah.
      Pertumbuhannya 2 kali lipat dari sebelumnya maka termasuk karakteristik yang model matematikanya berbentuk deret geometri.

b. Merumuskan deret yang merupakan model matematika dari masalah.

Produksi mula-mula = $u_1 = 200$

Laju pertumbuhan = $2 = \frac{u_2}{u_1}$ = rasio = r

Produksi setelah 6 bulan $= u_2 = 2u_1 = r\,u_1 = u_1 r$

Produksi setelah 12 bulan $= u_3 = 2u_2 = 22\,u_1$

$u_3 = r^2 u_1 = u_1 r^2$

Produksi setelah 18 bulan $= u_4 = 2u_3 = rr^2 u_1$

$u_4 = u_1 r^3$

Produksi setelah 10 tahun (120 bulan) maka berjalan 20 periode sehingga

$u_{21} = r^{20} u_1$ atau $u_{21} = u_1 r^{20}$

$u_{21} = u_1 r^{(21-1)}$

Jadi, rumus yang digunakan:

$$u_n = ar^{n-1}$$

c. Menentukan penyelesaian dari model matematikanya.

$u_n = ar^{n-1}$

$u_{21} = 20 \times (2)^{21-1}$

$u_{21} = 20 \times (2)^{20}$

$u_{21} = 20.971.520$

d. Memberikan tafsiran terhadap hasil yang diperoleh.

Jadi, perusahaan tersebut dapat memproduksi 20.971.520 pasang sepatu pada awal tahun 2010.

Latihan 3.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Suatu perusahaan pakaian dapat menghasilkan 5000 buah baju pada awal produksi. Dan selajutnya produksi dapat ditingkatkan menjadi 5050. Bila kemajuan konstan tentukan jumlah produksi setahun.
2. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan sampai bulan ke empat Rp30.000,00 dan sampai bulan ke delapan Rp172.000,00 rupiah. Tentukan keuntungan selama 18 bulan.

3. Di suatu daerah pemukiman baru angka (tingkat) pertumbuhan penduduk adalah 10% per tahun. Berapa prosen jumlah kenaikan penduduk dalam waktu 4 tahun?
4. Selama 5 bulan berturut-turut jumlah penduduk kota A berbentuk deret geometri. Pada tahun terakhir jumlah penduduk 4 juta, sedang jumlah tahun pertama dan ke tiga sama dengan $1\frac{1}{4}$ juta. Tentukan jumlah penduuk kota A pada tahun ke empat.
5. Sepotong kawat panjangnya 124 cm dipotong menjadi 5 bagian sehingga panjang potongannya membentuk barisan geometri. Potongan yang paling pendek panjanganya 4 cm, tentukan potogan kawat yang paling panjang.
6. Pada sebuah kursus yang baru dibuka, murid baru yang mendaftar setiap bulan bertambah dengan jumlah yang sama. Jumlah murid baru yang mendaftar pada bulan ke empat berjumlah 20 orang, sedangkan yang mendaftar pada bulan ke lima dan ke enam adalah 40 orang.

   Tentukan jumlah semua murid dalam 10 bulan pertama.
7. Seorang karyawan menabung dengan teratur setiap bulan. Uang yang ditabungkan setiap bulan selalu lebih besar dari bulan sebelumnya.

   Bila jumlah seluruh karyawan tabungannya dalam 12 bulan petama adalah Rp1.920.000,00 dan dalam 20 bulan pertama adalah Rp4.800.000,00. Tentukan besarnya uang yang ditabung pada bulan kesepuluh.
8. Andaikan 30 siswa dalam satu kelas mempunyai nilai ujian yang berbeda satu dengan lainnya dan setiap dua nilai yang berdekatan berbeda 0,3. Jika nilai rata-rata 75, tentukan nilai tertinggi di kelas tersebut.
9. Seorang anak menabung uang di rumah setiap akhir pekan. Uang yang ditabung pertama kali adalah Rp2.000,00. Setiap akhir pekan berikutnya selalu menabung Rp500,00 lebih besar dari sebelumnya.

   Berapakah jumlah tabungan anak tersebut setelah 50 pekan?

10. Seorang ayah membagikan uang sebesar Rp100.000,00 kepada 4 orang anaknya makin muda usia anak makin kecil uang yang diterima. Jika selisih yang diterima oleh setiap dua anak yang usianya berdekatan adalah Rp5.000,00 dan si sulung menerima uang paling banyak. Tentukan jumlah uang yang diterima oleh si bungsu.
11. Suatu keluarga mempunyai 6 anak yang usianya pada saat ini membentuk barisan aritmatika. Jika usia anak ke-3 adalah 7 tahun dan usia anak ke-5 adalah 12 tahun, berapa jumlah usia enam anak tersebut?
12. Seorang petani mencatat hasil panennya selama 11 hari, jika hasil panen hari pertama 15 kg dan mengalami kenaikan tetap sebesar 2 kg setiap hari. Berapa jumlah hasil panen yang dicatat?
13. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan sampai bulan keempat 80 ribu rupiah, dan sampai bulan kedelapan 172 ribu rupiah, tentukan keuntungan sampai bulan ke-18.
14. Seorang pemilik kebun memetik jeruknya setiap hari, dan mencatatnya. Ternyata berapa banyaknya jeruk yang dipetik pada hari ke-n memenuhi rumus $U_n = 80 + 20n$. Banyaknya jeruk yang dipetik selama 18 hari yang pertama?
15. Produksi pupuk organik menghasilkan 100 ton pupuk pada bulan pertama. Setiap bulannya menaikkan produksinya secara tetap 5 ton. Berapa jumlah pupuk yang diproduksi selama 1 tahun?
16. Satu jenis bakteri setelah satu detik akan membelah diri menjadi dua. Jika pada saat permulaan ada 5 bakteri, setelah berapa detik banyak bakteri menjadi 320?
17. Pada saat awal diamati 8 virus jenis tertentu. Setiap 24 jam masing-masing virus membelah diri menjadi 2. Jika setiap 96 jam seperempat dari seluruh virus dibunuh, tentukan banyaknya virus pada hari ke-6.
18. Pertambahan penduduk tiap tahun suatu desa mengikuti deret geometri. Pertambahan penduduk pada tahun 2004 sebesar 24 orang. tahun 2006 sebesar 96 orang. Berapa pertambahan penduduk tahun 2009?

E. Menjelaskan Rumus-rumus dalam Hitung Keuangan dengan Deret Aritmetika atau Deret Geometri (Pengayaan)

Contoh 3.8

1. Budi menyimpan uang di bank sebesar Rp5.000.000,00. Jika bank memberi bunga 6% setahun, tentukan besarnya uang Budi pada akhir tahun ke-3.

   Jawab:

   Andaikan pada contoh di atas Budi menabung dan bunganya ditambahkan pada modalnya, kemudian pada tahun berikutnya dihitung menurut modal yang baru, maka bunga yang demikian dinamakan bunga majemuk. Rumus bunga majemuk dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

   Misal modal semula = M dan bunganya setiap tahun adalah i, dengan $i = p\%$ maka diperoleh hubungan sebagai berikut.

   Bunga setelah 1 tahun $= Mi$

   Modal setelah 1 tahun $= M + Mi = M(1 + i)$

   Bunga setelah 2 tahun $= M(1 + i)i$

   Modal setelah 2 tahun $= M(1 + i) + M(1 + i)i$

   $= M(1 + i)(1 + i) = M(1 + i)^2$

   Bunga setelah 3 tahun $= M(1 + i)^2 i$

   Modal setelah 3 tahun $= M(1 + i)^2 + M(1 + i)^2 i$

   $= M(1 + i)^2 (1 + i) = M(1 + i)^3$

   Dengan memperhatikan besar modal setelah 1 tahun, 2 tahun, dan 3 tahun di atas, yaitu barisan bilangan $M(1 + i)$, $M(1 + i)^2$, $M(1 + i)^3$ maka besar modal setelah n tahun adalah $M_n = M(1 + i)^n$.

   Bentuk ini merupakan barisan geometri dengan $u_n = M_n$, $a = M$, dan $r = (1 + i)$.

   Dari soal di atas kita dapat menghitung sebagai berikut.

   $$\begin{aligned} M_n &= M(1 + i)^n \\ &= 5.000.000\,(1 + 0{,}06)^3 \\ &= 5.000.000\,(1{,}06)^3 = 5.000.000 \cdot 1{,}191016 \\ &= 5.955.080 \end{aligned}$$

   Jadi, uang Budi setelah 3 tahun (pada akhir tahun ke-3) menjadi Rp5.955.080,00.

2. Sebuah sepeda motor dibeli dengan harga Rp12.000.000,00. Jika setiap tahun harganya susut 10% dari harga pada tahun sebelumnya, tentukan harga sepeda motor itu setelah dipakai 4 tahun.

   Andaikan harga semula = M, setiap tahun menyusut sebesar $i = p\%$ maka diperoleh:

   Penyusutan setelah 1 tahun = Mi.

   Harga setelah 1 tahun = $M - Mi = M(1 - i)$.

   Harga setelah 2 tahun = $M(1 - i)^2$.

   Setelah n tahun harganya menjadi: $M_n = M(1 - i)^n$.

   Sehingga:

$$
\begin{aligned}
M_4 &= M(1 - i)^4 \\
&= 12.000.000\ (1 - 10\%)^4 \\
&= 12.000.000\ (0{,}9)^4 = 12.000.000(0{,}6561) \\
&= 7.873.200
\end{aligned}
$$

   Jadi, harga sepeda motor setelah dipakai 4 tahun adalah Rp7.873.200,00.

   Dari kedua contoh di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa hitung keuangan untuk pertumbuhan dirumuskan:

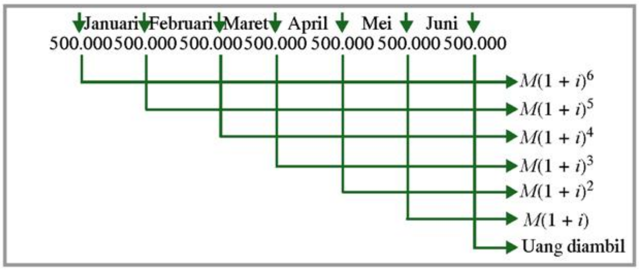
$$M_n = M(1 + i)^n$$

   dan untuk penyusutan dirumuskan:

$$M_n = M(1 - i)^n$$

3. Setiap awal bulan mulai bulan Januari 2007 Astrid menyimpan uang di bank sebesar Rp500.000,00, bank memberi bunga (jasa) $1\frac{1}{2}\%$ per bulan. Berapakah uang Astrid apabila pada akhir bulan Juni uangnya diambil seluruhnya?

   Jawab:



Jumlah uang seluruhnya

$= M(1+i) + M(1+i)^2 + M(1+i)^3 + M(1+i)^4 + M(1+i)^5 + M(1+i)^6$

$= M(1+i)\ \underbrace{[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4 + (1+i)^5]}_{\text{deret geometri dengan } a = 1 \text{ dan } r = 1+i}$

$= 500.000\ (1{,}015)\ [1 + (1{,}015)^2 + (1{,}015)^3 + (1{,}015)^4 + (1{,}015)^5]$

$= M\ (1+i)S_n$

$= M\ (1+i)S_5$

$$= 500.000\ (1 + 0{,}015)\frac{(1{,}015^5 - 1)}{(1{,}015 - 1)}$$

$= 2.614.775{,}47$

Jadi, pada akhir bulan Juni uang Astrid menjadi Rp2.614.775,47.

Dari contoh di atas tampak perhitungan menggunakan rumus deret geometri.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

F. Bunga Tunggal, Bunga Majemuk, Anuitas, dan Obligasi (Pengayaan)

Apakah kalian sering mendengar istilah untung, rugi, modal, bunga, jasa, deposito, menabung, bunga tunggal, bunga majemuk, korting (diskon), diskonto, anuitas, giro, saham, inflasi, devaluasi, dan lain-lain?

Kata-kata tersebut adalah sebagian dari kata-kata yang sering digunakan dalam perdagangan dan keuangan.

Bila kita mempunyai uang dalam jumlah banyak, kita tentu mengharapkan agar uang itu tersimpan dengan aman dan dapat bertambah banyak. Besar persen bunga yang diberikan bank tentu tergantung dari besar kecilnya uang, lamanya menyimpan, dan jenis simpanan.

1. Bunga Tunggal

Misalnya kalian meminjam uang di bank sebanyak Rp25.000.000,00 selama 5 tahun. Apakah kamu hanya mengembalikan Rp25.000.000,00 saja? Tentu tidak, karena ada bunga yang harus dibayar. Suku bunga ialah rasio antara bunga dengan modal untuk satuan waktu tertentu. Suku bunga dinyatakan dengan % (dibaca: persen).

Contoh 3.9

1. Seorang tukang kayu meminjam uang kepada seorang pengusaha mebel sebesar Rp1.000.000,00. Selama 1 tahun suku bunganya sebesar 18%.

   Tentukan:

   a. besar modal,
   b. besar bunga,
   c. jumlah yang yang harus dikembalikan, dan
   d. jenis bunganya.

   Jawab:

   a. Modal = Rp1.000.000,00

   b. Bunga $= \frac{18}{100} \times$ Rp1.000.000,00

   = Rp180.000,00

   c. Jumlah uang yang harus dikembalikan

   = Rp1.000.000,00 + Rp180.000,00

   = Rp1.180.000,00

   d. Bunga tersebut termasuk bunga tunggal sebab ia mengembalikan sesuai perjanjian dengan jangka waktu tertentu dan bunga dibayar pada saat mengembalikan.

2. Bu Rina meminjam uang di Koperasi Simpan Pinjam sebesar Rp500.000,00, dalam jangka waktu 1 tahun ia harus mengembalikan pinjaman itu sebesar Rp600.000,00, berapa % suku bunganya?

   Jawab:

   Bunga = 600.000 – 500.000 = 100.000

   Suku bunga $= \frac{100.000}{500.000} \times 100\% = 20\%$

   Jadi, besarnya suku bunga adalah 20%.

3. Badrun meminjam uang Rp2.000.000,00 pada Yusuf, selama jangka waktu 1 bulan Badrun diminta untuk mengembalikannya menjadi satu seperempat kali lebih besar. Berapa % suku bunga pinjaman tersebut?

   Jawab:
   Misal suku bunga = p%

   Bunga = $\frac{p}{100} \times$ Rp2.000.000,00 = 20.000p

   Setelah satu tahun Badrun harus mengembalikan =

   $1\frac{1}{4} \times$ Rp2.000.000,00

   $$\begin{aligned} 2.000.000 + 20.000p &= 1\tfrac{1}{4} \times 2.000.000 \\ 2.000.000 + 20.000p &= 2.500.000 \\ 20.000p &= 500.000 \\ p &= 25 \end{aligned}$$

   Jadi, bunga yang ditetapkan Yusuf adalah sebesar 25%.

4. Bajuri meminjam uang Rp1.000.000,00 dengan dasar bunga tunggal sebesar 2% per bulan. Berapa ia harus mengembalikan setelah meminjam 25 bulan? (Yaitu bunga yang dibebankan pada pokok/pinjaman).

   Jawab:
   Modal = M = Rp1.000.000,00
   Bunga = 2% (i = 0,02)
   Jangka waktu = 25
   Modal setelah 1 bulan = M_1 = $M + b$
   Modal setelah 2 bulan = M_2 = $M_1 + b = M + 2b$
   Modal setelah 3 bulan = M_3 = $M_2 + b = M + 3b$
   Modal setelah 25 bulan = M_{25} = $M + 24b$

   $M_{25} = 1.000.000 + 24\ (\frac{2}{100} \times 1.000.000)$

   $M_{25} = 1.480.000,00$

   Jadi, Bajuri harus mengembalikan uang sebesar Rp1.480.000,00.

   Dari contoh di atas dapat disimpulkan:

   $$M_n = M_0 + (n - 1)b$$

dengan M_n adalah modal setelah n tahun
M_0 adalah modal mula-mula
n adalah jangka waktu
b adalah bunga

Perhitungan bunga tunggal ada dua macam yaitu bunga tunggal eksak dan bunga tunggal biasa.
Bunga tunggal eksak berdasar perhitungan setahun ada 365 hari (tahun kabisat 366 hari), sedang bunga tunggal biasa berdasar pada perhitungan setahun ada 360 hari.
Apakah keuntungannya satu tahun dihitung 360 hari?
Keuntungannya ialah pertama mempermudah perhitungan dan kedua menambah lebih besar bunga bagi yang meminjamkan uang.

Contoh 3.10

Arinda meminjam uang Rp1.000.000,00 selama 75 hari dengan suku bunga 2% pada tahun 2008 dan tahun 2009. Hitunglah dengan bunga tunggal eksak dan bunga tunggal biasa.
Jawab:
a. Tahun 2008 (tahun kabisat)

$$\text{Bunga tunggal eksak} = \frac{75}{366} \times \frac{2}{100} \times 1.000.000,00$$
$$= \text{Rp}4.089,36$$

$$\text{Bunga tunggal biasa} = \frac{75}{360} \times \frac{2}{100} \times 1.000.000,00$$
$$= \text{Rp}4.166,67$$

b. Tahun 2009

$$\text{Bunga tunggal eksak} = \frac{75}{365} \times \frac{2}{100} \times 1.000.000,00$$
$$= \text{Rp}4.109,59$$

$$\text{Bunga tunggal biasa} = \frac{75}{360} \times \frac{2}{100} \times 1.000.000,00$$
$$= \text{Rp}4.166,67$$

Terkadang dalam meminjam uang, bunga telah dibayar dimuka hal tersebut dinamakan diskonto.

Contoh 3.11

Pinjaman Rp100.000,00 dengan suku bunga 10% (Rp10.000,00) pada waktu meminjam tinggal Rp90.000,00 tetapi pada saat mengembalikan sebesar Rp100.000,00.

Latihan 3.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Hitunglah bunga dari modal Rp1.000.000,00 bila suku bunganya sebagai berikut.
   a. 10% untuk 2 tahun
   b. 15% untuk 8 bulan
   c. 10% untuk 2 tahun
   d. 20% untuk 4 bulan
   e. 15% untuk 15 bulan
   f. 18% untuk 5 bulan
2. Tentukan besar suku bunga tunggal per tahunnya, jika:
   a. Rp1.000.000,00 menjadi Rp1.250.000,00 dalam 1 tahun.
   b. Rp50.000,00 menjadi Rp100.000,00 dalam 2 tahun.
   c. Rp2.000.000,00 menjadi Rp3.000.000,00 dalam 8 bulan.
3. Pak Jaja menyewakan rumah seharga Rp5.000.000,00 setahun kepada Pak Achmad. Karena Pak Achmad hanya punya uang tunai Rp3.000.000,00 sisanya disetujui untuk dilunasi dalam waktu 4 bulan kemudian tetapi menjadi Rp2.500.000,00. Tentukan besarnya suku bunga tunggal per bulan.
4. Berapa lama uang sebanyak Rp1.000.000,00 dengan suku bunga tunggal 5% per bulan harus dipinjamkan agar menjadi Rp1.750.000,00?
5. Berapa tahun modal harus dipinjamkan dengan suku bunga tunggal 4% per bulan agar uang yang diperoleh nanti menjadi tiga kali modal?
6. Hitunglah bunga tunggal biasa dan eksak dari modal Rp3.000.000,00 yang dipinjamkan selama 60 hari dengan suku bunga tunggal 15% setahun pada tahun 2007.
7. Carilah waktu eksak dan waktu rata-rata dari:
   a. 24 Januari 2008 sampai dengan 27 Februari 2008.
   b. 15 Januari 2008 sampai dengan 3 Maret 2008.
   c. 6 Juni 2008 sampai dengan 6 Oktober 2008.
8. Hitung bunga tunggal eksak dan biasa dengan menggunakan waktu eksak dan waktu rata-rata pada soal nomor 6 di atas.

9. Pak Haekal meminjam uang sebanyak Rp10.000.000,00 dari bank dengan diskonto 3% selama satu tahun.
   Berapa rupiah uang yang diterima Pak Haekal dari bank itu?
10. Tentukan besarnya uang yang dipinjam dari bank dengan diskonto sebesar 10% dalam jangka waktu setahun agar uang yang diterima sebesar Rp5.000.000,00.

2. Bunga Majemuk

Apabila kita meminjam uang dari bank Rp10.000.000,00 dengan suku bunga 2% per bulan misalnya, dan jangka pinjamannya 8 bulan. Maka kalian dapat mengetahui bahwa bunga per bulan itu Rp200.000,00.

Bagaimana dengan bunga sebesar Rp200.000,00 itu? Apakah dibayarkannya pada setiap akhir bulan, atau pada akhir bulan ke-8 seluruhnya? Tentu saja ini tergantung dari perjanjian. Bila pembayarannya dilakukan tiap akhir bulan, hal ini tentunya tidak asing lagi bagi kita bahwa peminjaman itu menggunakan perjanjian bunga tunggal. Jadi uang yang harus dikembalikan ialah Rp10.000.000,00 + Rp1.600.000,00 = Rp11.600.000,00. Tetapi bila tidak menggunakan perjanjian bunga tunggal (bunga sekaligus dibayarkan pada akhir bulan ke-8), maka bank tidak mau menerima pengembalian modal atau pinjaman sebesar Rp11.600.000,00. Sebab bunga sebelum bulan ke-8 yang tidak dikembalikan pada waktunya harus dibungakan juga.

Perhatikan contoh terakhir di atas. Bunga pada setiap akhir perjanjian tidak diambil, tetapi digabungkan dengan modal sebelumnya sehingga terjadi penambahan modal dari bunga kumulatif. Bunga demikian disebut bunga majemuk. Dengan perjanjian bunga majemuk contoh di atas menjadi:

a. Pada akhir bulan pertama modal menjadi

$$10.000.000\ (1 + \frac{2}{100}) = 10.200.000$$

b. Pada akhir bulan kedua modal menjadi

$$10.020.000\ (1 + \frac{2}{100}) = 10.404.000$$

c. Pada akhir bulan ketiga modal menjadi

$$10.404.000\ (1 + \frac{2}{100}) = 10.612.080$$

d. Pada akhir bulan keempat modal menjadi

$$10.612.080\ (1 + \frac{2}{100}) = 10.824.321,6$$

e. Pada akhir bulan kelima modal menjadi

$$10.824.321,6\ (1 + \frac{2}{100}) = 11.040.808,03$$

f. Pada akhir bulan keenam modal menjadi

$$11.040.808,03\ (1 + \frac{2}{100}) = 11.261.624,19$$

g. Pada akhir bulan ketujuh modal menjadi

$$11.261.624,19\ (1 + \frac{2}{100}) = 11.486.856,67$$

h. Pada akhir bulan kedelapan modal menjadi

$$11.486.856,67\ (1 + \frac{2}{100}) = 11.716.593,80$$

Jadi, pada bunga majemuk, bunga yang diperoleh tidak diambil tetapi disatukan dengan modal menjadi modal baru. Penyatuan bunga dengan modal atas dasar tahunan, semesteran, kuartalan, bulanan, dan lain-lain. Seringnya bunga digabungkan dengan modal dalam satu tahun disebut frekuensi penggabungan. Lamanya waktu antara dua masa berturutan penggabungan bunga disebut periode pengembalian atau periode bunga. Pada contoh di atas periode bunganya adalah satu bulan.

Hal-hal yang harus kita perhatikan dalam persoalan bunga majemuk adalah sebagai berikut.

a. besarnya modal;
b. suku bunga untuk setiap periode bunga;
c. banyaknya periode bunga selama peminjaman.

Andaikan kita menanam modal sebesar M rupiah dengan suku bunga sebesar $p\% = b$ untuk setiap periode bunga. Sedangkan J merupakan besarnya uang yang ditanam setelah n periode bunga.

Bagaimanakah hubungannya antara J, M, n, dan b?

Besarnya modal yang ditanam pada akhir periode bunga ke-n adalah $M_1 = M + Mb = M(1 + b)$, $M_2 = M(1 + b)\ (1 + b) = M(1 + b)^2$, $M_3 = M(1 + b)^2\ (1 + b) = M(1 + b)^3$, dan besar bunga ke-$n$ $(M_n) = M(1 + b)^{n-1}\ (1 + b) = M(1 + b)^n$.

Jadi modal M setelah disimpan selama n tahun dengan suku bunga majemuk $b\%$ per tahun besarnya menjadi J. Sehingga:

$$J = M(1 + b)^n$$

Biasanya ditulis: $M_n = M_0(1 + b)^n$

dengan M_n adalah modal setelah berjalan n waktu
M_0 adalah modal mula-mula
b adalah suku bunga $p\%$
n adalah jangka waktu

Contoh 3.12

1. Modal sebesar Rp1.000.000,00 disimpan selama 2 tahun dengan suku bunga 2% per bulan. Tentukan besarnya bunga majemuk.

   Jawab:

   M = Rp1.000.000,00
   b = 2%
   n = 2 tahun = 24

   Misalkan modal akhir J, maka

   $$\begin{aligned} J &= M(1 + b)^n \\ &= 1.000.000 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{24} \\ &= 1.000.000\,(1{,}02)^{24} \end{aligned}$$

   Untuk menghitung $(1{,}02)^{24}$ dapat dilakukan dengan cara:

   a. Dengan daftar bunga $b = 2\%$, $n = 24$ diperoleh $(1{,}02)^{24} = 1{,}60843725$ (tabel).
   b. Dengan kalkulator langsung $(1{,}02)^{24} = 1{,}608437249$.
   c. Atau dengan logaritma.

   Cara yang paling mudah dengan menggunakan kalkulator.

   $J = (1.000.000)(1{,}608437249)$
   $J = 1.608.437{,}25$

   Jadi, bunga majemuk $= J - M$
   $= 1.608.437{,}25 - 1.000.000$
   $= 608.437{,}25$

2. Modal M disimpan dengan suku bunga 4% per bulan yang bunganya sama dengan bila disimpan dengan bunga majemuk dengan suku bunga $x\%$ per bulan selama 3 bulan. Tentukan x.

Jawab:

Modal M setelah disimpan dengan bunga 4% $= M(1{,}04)$

Modal M setelah disimpan 3 bulan dengan majemuk x% per bulan $= M_3$

$$\Leftrightarrow \quad M_3 = M\left(1+\frac{x}{100}\right)^3$$

$$M(1{,}04) = M_3$$

$$\Leftrightarrow \quad M(1{,}04) = M\left(1+\frac{x}{100}\right)^3$$

$$1{,}04 = \left(1+\frac{x}{100}\right)^3$$

$$\log 1{,}04 = 3 \log \left(1+\frac{x}{100}\right)^3$$

$$\log \left(1+\frac{x}{100}\right)^3 = \frac{\log 1{,}04}{3} = \frac{0{,}017}{3} = 0{,}006$$

(dibulatkan ke-3 desimal)

$$1 + \frac{x}{100} = 1{,}014$$

$$x = 100 \times 0{,}014 = 1{,}4$$

Pada penyimpanan modal dengan tanggal pengembalian yang pasti akan memudahkan untuk mengetahui berapa uang yang akan dikembalikan itu. Nilai uang yang diterima pada akhir penanaman modal itu disebut nilai akhir, sedangkan nilai uang pada saat modal itu ditanamkan disebut nilai tunai. Saat uang itu dikembalikan disebut hari valuta.

Contoh 3.13

1. Uang sebanyak Rp5.000.000,00 didepositokan untuk 5 tahun dengan suku bunga majemuk 5% per tahun. Hitunglah nilai akhir modal itu.

Jawab:

$M_n = M(1 + b)^n$

$$M_5 = 5.000.000\left(1+\frac{5}{100}\right)^5$$

$= 5.000.000\,(1{,}05)^5$

$= 5.000.000 \times 1{,}276281562$

$= 6.381.407{,}81$

Jadi, setelah 5 tahun modal tersebut menjadi Rp6.381.407,81.

2. Sejumlah modal disimpan dengan suku bunga majemuk sebesar 4% per tahun untuk waktu 5 tahun. Pada hari valuta uang yang diterima sebesar Rp1.250.000,00. Tentukan nilai tunai modal itu.

Jawab:

$M_n = M(1 + b)^n$

$$1.250.000 = M\left(1+\frac{4}{100}\right)^5$$

$1.250.000 = M(1{,}04)^5$

$$M = \frac{1.250.000}{(1{,}04)^5} = \frac{1.250.000}{1{,}216652902} = 1.027.408{,}87$$

Jadi, nilai tunai modalnya adalah Rp1.027.408,87.

3. Seorang anak mempunyai uang sebesar Rp100.000,00. Jika besar suku bunga majemuk 20% per tahun berapa lamakah uang tersebut harus disimpan agar nilai akhir menjadi 2 kali nilai tunai?

Jawab:

Misalkan ia harus menyimpan uangnya selama x tahun agar uangnya menjadi 2 kali lipat.

Maka, $M = \dfrac{J}{(1+b)^x}$

$$100.000 = \frac{2 \times 100.000}{(1+0{,}20)^x}$$

$(1 + 0{,}20)^x = 2$

$$(1,2)^x = 2$$
$$x \log 1,2 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1,2} = \frac{0,301}{0,079} = 3,810 \approx 4$$

Jadi, uang harus ditanam selama 4 tahun.

Cara lain penanaman modal adalah dengan angsuran. Bila angsuran itu dilakukan dengan jangka waktu yang sama atau jarak waktu 2 valuta itu sama, deretan modal demikian disebut rente. Dan bila pembayarannya dilakukan pada setiap permulaan dari jangka waktu pembayaran, rente itu disebut pranumerando, sedangkan bila pembayarannya dilakukan pada setiap akhir jangka waktu pembayaran, rente itu disebut rente postnumerando.

Apakah ada perbedaan antara besarnya modal yang diangsur menurut rente pranumerando dengan rente postnumerando? Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.14

Selama lima bulan berturut-turut, seorang nasabah setiap bulannya menyimpan uang di bank sebesar Rp1.000.000,00 dengan suku bunga majemuk 2% per tahun.

Tentukan berapa besarnya modal setelah lima bulan dengan ketentuan berikut.

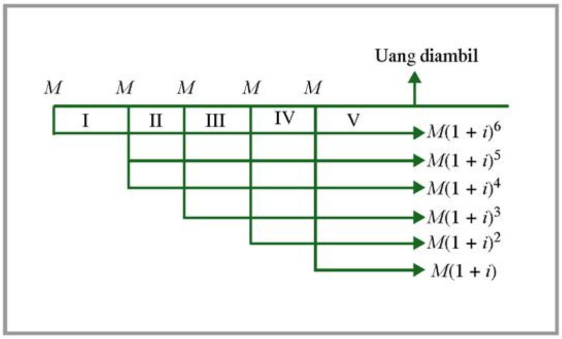
a. Pembayaran dilakukan pada setiap permulaan jangka waktu pembayaran (pranumerando).
b. Pembayaran dilakukan pada setiap akhir jangka waktu pembayaran (postnumerando).

Jawab:

Modal = M = 1.000.000

Bunga = b = 2%

a. Pranumerando



Setelah lima bulan modal yang diperoleh

$= M(1+b) + M(1+b)^2 + M(1+b)^3 + M(1+b)^4 + M(1+b)^5$

$= M(1+b)\,[1 + (1+b) + (1+b)^2 + (1+b)^3 + (1+b)^4]$

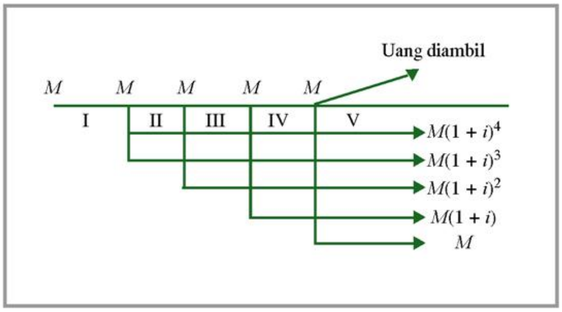
$= 1.000.000\,(1{,}02)\,\underbrace{[1 + (1{,}02) + (1{,}02)^2 + (1{,}02)^3 + (1{,}02)^4]}_{\text{deret geometri dengan } a = 1 \text{ dan } r = 1{,}02}$

$= 1.000.000 \times 1{,}02 \times \left(\dfrac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1}\right)$

$= 5.308.120{,}95$

Jadi, besarnya modal pada awal bulan keenam (akhir bulan kelima) adalah Rp5.308.120,95.

b. Postnumerando



Setelah lima bulan besarnya modal

$$= M + M(1 + b) + M(1 + b)^2 + M(1 + b)^3 + M(1 + b)^4$$
$$= M\,[1 + (1 + b) + (1 + b)^2 + (1 + b)^3 + (1 + b)^4]$$
$$= 1.000.000\,[1 + (1{,}02) + (1{,}02)^2 + (1{,}02)^3 + (1{,}02)^4]$$
$$= 1.000.000\,[\underbrace{1 + (1{,}02) + (1{,}02)^2 + (1{,}02)^3 + (1{,}02)^4}_{\text{deret geometri dengan } a = 1 \text{ dan } r = 1{,}02}]$$
$$= 1.000.000\left[\frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1}\right]$$
$$= 5.204.040{,}15$$

Jadi, besarnya modal pada awal bulan keenam (akhir bulan kelima) adalah Rp5.204.040,15.

Coba bandingkan kedua cara di atas.

Latihan 3.7

Kerjakan soal-soal berikut dengan tepat.

(Catatan: Bila tidak ada keterangan mengenai suku bunga majemuk dalam soal berikut, suku bunga dibuat per tahun).

1. Modal Rp1.000.000,00 dimasukkan pada bank selama 5 tahun dengan bunga majemuk yang besar bunganya 4%.
   a. Berapakah bunganya?
   b. Bila modal di atas dengan suku bunga yang sama dan dengan jangka waktu yang sama pula ditanamkan dengan bunga tunggal, berapa rupiah lebihnya bunga dari cara (a)?
2. Berapakah bunga majemuk yang diperoleh jika modal Rp1.000.000,00 disimpan di bank dengan suku bunga 6% selama 3 tahun dan 5 tahun masing-masing?
3. Modal sebesar Rp4.000.000,00 ditanamkan dengan suku bunga majemuk 5% selama 2 tahun yang pengambilannya dengan kuartalan.
   a. Hitunglah suku bunga untuk setiap periode bunga.
   b. Hitunglah banyaknya periode bunga.
   c. Tentukan besar modalnya pada akhir perjanjian itu.
4. Tanggal 27 Maret 2007 Amin menyimpan uangnya di bank sebesar Rp1.000.000,00 dengan suku bunga majemuk sebesar 10% yang pengambilannya setengah tahunan.
   Pada tanggal 27 Desember 2009 uang itu diambil.

a. Hitunglah suku bunga untuk setiap periode bunga.
b. Tentukan banyak periode bunganya?
c. Berapa rupiah nilai akhirnya?

5. Uang sebesar Rp3.000.000,00 dipinjamkan dengan suku bunga majemuk sebesar 2% per bulan selama 2 tahun. Setelah berjalan 9 bulan, pemilik modal meminta agar suku bunganya dinaikkan menjadi $2\frac{1}{2}$%, ini disebabkan karena kenaikan harga. Bila permintaannya itu dipenuhi, berapa rupiahkah lebihnya jika permintaannya diterima dibandingkan dengan jika ditolak.
6. Uang sebesar Rp6.000.000,00 diinvestasikan untuk selama $3\frac{1}{4}$ tahun dengan bunga majemuk dan suku bunga 6%.
   a. Berapa rupiah nilai tunainya?
   b. Berapa rupiah nilai akhirnya?
7. Tentukan besarnya modal baru yang diterima pada hari valuta bila modal sebesar Rp10.000.000,00 ditanam dengan suku bunga majemuk sebesar 4% per bulan dalam jangka waktu $5\frac{1}{4}$ tahun?
8. Pak Amat meminjam uang dari bank sebesar Rp3.750.000,00 untuk jangka waktu $2\frac{1}{2}$ tahun dengan suku bunga majemuk sebesar 2% per bulan. Dengan seluruh uang itu ia berdagang dan diperkirakan ia akan memperoleh keuntungan $3\frac{1}{2}$% per bulan. Berapa rupiahkah keuntungan Pak Amat tiap bulan?
9. Selama 5 tahun pada setiap awal tahun disimpan uang sebanyak Rp100.000,00 ke bank dengan suku bunga majemuk sebesar 10% per tahun.
   a. Berapa besar modalnya pada akhir angsuran ke-5 itu?
   b. Tentukan jenis rentenya.
10. Sebuah bank memberikan bantuan berupa uang ke suatu sekolah sebesar Rp100.000,00 tiap awal bulan selama 3 tahun. Jika sekolah tersebut meminta agar bantuan tersebut diterima sekaligus pada awal tahun pertama, maka berapakah yang akan diterima oleh sekolah tersebut jika bank memberikan bunga 4% tiap bulan?

3. Anuitas

Perhatikan contoh berikut.

Seseorangmempunyai hutang di bank sebesar Rp100.000.000,00. Ia bermaksud melunasi hutangnya dengan 5 angsuran yang besarnya tetap, setahun sekali. Bank menerima bunga majemuk 4% setahun. Pelunasan pertama dibayar setelah satu tahun. Berapakah besarnya angsuran tetap tersebut?

Dalam persoalan ini, setiap angsuran yang besarnya tetap itu telah terhitung pelunasan hutang beserta bunganya. Angsuran yang tetap itu disebut **anuitas**.

Jika dalam persoalan lain, angsuran yang tetap dilakukan bukan setahun sekali, tetapi dalam satu periode waktu tertentu, maka angsuran yang tetap itu disebut **anuitas**.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa:

> Anuitas ialah jumlah pembayaran setiap periode yang besarnya tetap, serta di dalamnya sudah terhitung pelunasan hutang dan bunganya.

Berikut ini diberikan contoh-contoh sederhana dari pengertian anuitas dalam kehidupan sehari-hari.

1. Pembayaran premi tahunan dari nasabah kepada pihak asuransi.
2. Pembayaran uang sewa rumah per tahun.
3. Pembayaran gaji pegawai suatu perusahaan tiap bulan.
4. Pembayaran deposito per tahun.

a. Jenis-jenis Anuitas

Berdasarkan interval pembayaran atau tempo pembayarannya, anuitas terdiri atas 2 jenis, yaitu:

1) Anuitas Pasti

Anuitas ini terjadi saat tempo pembayaran tetap atau waktu dimulainya pembayaran dan pembayaran terakhir adalah tetap.

Contohnya pembayaran deposito per tahun, merupakan jenis anuitas umum karena tempo pembayaran awal dan akhir adalah tetap sama.

2) Anuitas Tidak Pasti

Anuitas ini terjadi apabila tempo pembayarannya tidak tetap atau bergantung pada suatu keadaan.

Contohnya pembayaran premi tahunan dari nasabah kepada pihak asuransi, merupakan jenis anuitas khusus karena tempo pembayaran awal dan akhirnya tidak tetap.

Interval pembayaran merupakan selang waktu antara dua pembayaran berturut-turut dari suatu anuitas, sedangkan tempo dari anuitas merupakan batas selang waktu antara permulaan interval pembayaran hingga akhir interval pembayaran.

Jenis anuitas yang kita pelajari ini adalah jenis anuitas umum atau disingkat dengan anuitas, yang perhitungan pembayarannya dibuat atau dihitung pada akhir dari setiap interval pembayaran.

Dua hal penting yang perlu diperhatikan dalam anuitas terkandung dua bagian penting yang perlu dipahami, yaitu:

a. Angsuran pelunasan hutang.
b. Pembayaran bunga atas sejumlah pinjaman

Rencana untuk melunasi pinjaman disebut rencana pelunasan atau rencana angsuran atau amortisasi.

Sehingga dari pengertian di atas, besarnya anuitas sebagai berikut ini.

Anuitas = Angsuran + Bunga

b. Rumus Umum Anuitas

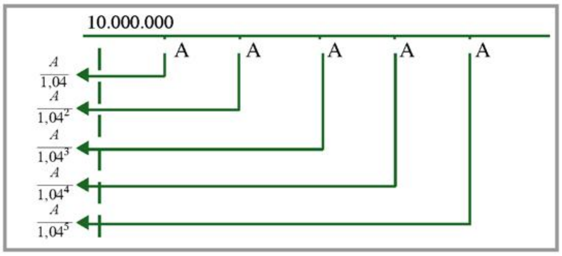
Contoh 3.15

Hutang sebesar Rp10.000.000,00 akan dilunasi dalam 5 anuitas tahunan. Anuitas pertama dibayar setelah setahun penerimaan uang Rp10.000.000,00 bunga 4% setahun.

Jawab:

Misalkan besarnya anuitas itu A.

Perhatikan gambar berikut.



Jumlah nilai tunai kelima anuitas itu harus sama dengan Rp10.000.000,00 (sebesar hutang semula).

Jadi, $10.000.000 = \frac{A}{1{,}04} + \frac{A}{1{,}04^2} + \frac{A}{1{,}04^3} + \frac{A}{1{,}04^4} + \frac{A}{1{,}04^5}$

Untuk mencari besar A dari persamaan di atas, dapat dicari dengan dua cara yaitu dengan deret geometri dan dengan daftar bunga.

1) Menentukan Anuitas dengan Deret Geometri

Ruas kanan dari persamaan di atas dapat dipandang sebagai deret geometri dengan:

$$a = \frac{A}{1{,}04}$$

$$r = \frac{1}{1{,}04}$$

$$n = 5$$

Jumlah dari deret tersebut adalah:

$$S = \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5}{1-\frac{1}{1{,}04}}$$

$$= \frac{A}{1{,}04^5} \times \frac{1{,}04^5-1}{1{,}04-1}$$

$$= \frac{A}{1{,}21655290} \times \frac{1{,}21655290-1}{0{,}04}$$

$$= \frac{A}{1{,}21655290} \times \frac{0{,}21665290}{0{,}04}$$

Sehingga:

Sudut Matematika

Anuitas adalah jenis alat investigasi yang digunakan sebagai sumber penghasilan bagi para pensiunan. Anuitas satu-satunya instrumen keuangan yang menyajikan jaminan penghasilan seumur hidup. Anuitas melakukan pembayaran berkala dalam periode tertentu seumur hidup. Periode pada saat premi disetorkan untuk membeli anuitas dikenal sebagai periode pengakumulasian dan periode dimana pembayaran anuitas dilakukan dikenal sebagai periode pendistribusian.

Sumber: *e-dukasinet*

$$\frac{A}{1{,}21655290} \times \frac{0{,}21665290}{0{,}04} = 10.000.000$$

$$A = \text{........} \times 1{,}21665290 \times \frac{0{,}004}{0{,}21665290}$$

$$= 2.246.271$$

Jadi, besarnya anuitas adalah Rp2.246.271,00.

2) Menentukan Anuitas dengan Daftar Bunga (DAFTAR V)

$$10.000.000 = \frac{A}{1{,}04} + \frac{A}{1{,}04^2} + \frac{A}{1{,}04^3} + \frac{A}{1{,}04^4} + \frac{A}{1{,}04^5}$$

$$\Leftrightarrow 10.000.000 = \left(\frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}04^2} + \frac{1}{1{,}04^3} + \frac{1}{1{,}04^4} + \frac{1}{1{,}04^5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 10.000.000 = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{1{,}04^k}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{10.000.000}{\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{1{,}04^k}}$$

$$\Leftrightarrow A = 10.000.000 \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{1{,}04^k}}$$

$$\Leftrightarrow A = 10.000.000\,(0{,}22462711) \longrightarrow \text{lihat Daftar}$$

$$\Leftrightarrow A = 2.246.271$$

Jadi, besarnya anuitas dirumuskan sebagai berikut.

$$A = H \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k}} \quad \text{atau} \quad A = H \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k}}$$

dengan A adalah besarnya anuitas

H adalah besarnya hutang

Contoh 3.16

1. Sebuah perusahaan mempunyai hutang sebesar Rp100.000.000,00 dilunaskan dalam 8 anuitas, tiap satu tahun. Anuitas pertama dibayar sesudah 1 tahun. Tentukanlah besarnya anuitas itu jika bunganya 4% setahun.

   Jawab:

   $H = 100.000.000$
   $I = 0{,}04$
   $N = 8$

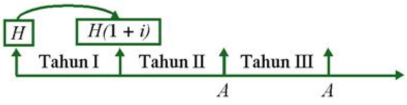
   $$A = H \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{(1{,}04)^k}}$$

   $= 100.000.000(0{,}14852783) = 14.852.780$

   Jadi, besarnya anuitas adalah Rp14.852.780,00.

2. Sebuah yayasan mendapat pinjaman dari bank sebesar Rp100.000.000,00 yang akan dilunasi dalam 20 anuitas tahunan. Anuitas pertama dibayar dua tahun setelah menerima pinjaman, bunga 4% setahun. Berapa besarnya anuitas tersebut?

   Jawab:



   Karena anuitas pertama dibayar sesudah dua tahun, maka rumusnya: $A = H \times \frac{1}{\sum (1+i)^{-k}}$ harus disesuaikan.

   Pinjaman sebesar H pada awal tahun pertama, berubah menjadi $H(1 + i)$ pada awal tahun ke dua. Besarnya $H(1 + i)$ ini dianggap hutang yang baru untuk menentukan anuitasnya.

Sehingga:

$$A = H(1+i)\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}}$$

$$= 100.000.000\,(1{,}04)\,\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{20}(1{,}04)^{-k}}\right)$$

$$= 100.000.000\,(1{,}04)(0{,}07358175)$$
$$= 7.652.500$$

Jadi, besarnya anuitas ialah Rp7.652.500,00.

3. Seseorang berhutang sebesar Rp250.000,00 akan diangsur dengan anuitas tahunan. Besarnya tiap anuitas Rp20.941,65, bunga 3% setahun. Berapa lama pinjaman itu diangsur.

Jawab:

$$\text{A} \quad = H\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 20.941{,}65 \quad = 250.000 \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1{,}03)^{-k}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{20.941{,}65}{250.000} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1{,}03)^{-k}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}0837666 \quad = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1{,}03)^{-k}}$$

Menurut daftar, harga n kira-kira adalah 15.
Jadi, pinjaman itu diangsur dengan 15 anuitas atau selama 15 tahun.

Latihan 3.8

1. a. Sebuah perusahan hutang sebesar Rp100.000.000,00 dilunasi dalam 8 anuitas tahunan. Anuitas pertama dibayar setelah 1 tahun. Tentukanlah besarnya anuitas tersebut kalau bunganya 5% setahun.
   b. Seseorang hutang sebesar Rp50.000.000,00 yang dibayar dalam 10 anuitas bulanan. Anuitas pertama dibayar setelah 1 bulan. Tentukanlah besarnya anuitas tersebut kalau bunganya 2% sebulan.
2. Sebuah yayasan mendapat pinjaman dari bank sebesar Rp150.000.000,00. Pinjaman itu akan dibayar secara anuitas. Anuitas pertama dibayar lima tahun setelah menerima pinjaman. Bunga 6% se tahun. Berapa besarnya anuitas tersebut?
3. Seseorang mendapat kredit dari bank sebesar Rp50.000.000,00, untuk usahanya. Kredit itu harus mulai diangsur dua tahun kemudian, selama 4 tahun, dalam anuitas bulanan. Jadi, ia harus mengangsur 48 kali dalam 4 tahun tersebut setiap bulan. Bunganya diperhitungkan $1\frac{1}{2}$ sebulan. Berapa besar angsurannya?
4. Perusahaan perumahan "Gambul" menyediakan kredit pemilikan rumah untuk dua tipe yaitu tipe T 21 dan T 36 dengan sejumlah uang muka. Besarnya harga tunai dan uang muka untuk tiap-tiap tipe dapat dilihat pada tabel berikut.

Tipe	Harga Tunai	Uang muka
T 21	Rp40.000.000,00	Rp12.000.000,00
T 36	Rp50.000.000,00	Rp20.000.000,00

   Rumah tersebut dapat ditempati setelah uang muka dibayar, dan cicilan yang tetap besarnya harus mulai dibayar sebulan kemudian selama 10 tahun. Bunga diperhitungkan $1\frac{1}{2}\%$ sebulan. Berapa besarnya cicilan untuk masing-masing tipe, apabila cicilan itu harus dibayar tiap bulan?
5. Sebuah home industri hutang sebesar Rp75.000.000,00 dibayar dengan 20 anuitas tahunan. Pembayaran pertama dilakukan sesudah 1 tahun. Bunga 5% setahun.

a. Tentukan besarnya anuitas.
b. Tentukan besarnya pelunasan pada anuitas ketujuh.
c. Tentukan besarnya sisa hutang setelah anuitas keenam.

Rangkuman

1. Notasi sigma dilambangkan $\sum$ adalah suatu cara yang singkat untuk menyatakan bentuk penjumlahan.
2. Barisan bilangan (u_n) adalah urutan bilangan yang mempunyai aturan tertentu.
3. Deret bilangan (S_n) adalah jumlah suku-suku barisan bilangan.
4. Barisan aritmetika adalah suatu barisan di mana selisih dua suku berurutan besarnya tetap. Selisih dua suku tersebut dinamakan beda (b).
   $u_n = a + (n - 1)b$
5. Barisan geometri adalah suatu barisan di mana perbandingan dua buah suku yang berurutan besarnya tetap. Perbandingan dua suku berurutan tersebut dinamakan rasio (r).
   $u_n = ar^{n-1}$
6. Jumlah n suku pertama deret aritmetika dinyatakan dengan:

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + (n - 1)b) = \frac{1}{2}n\,(2a + (n - 1)b)$$

$$= \frac{1}{2}n\,(a + u_n)$$ dengan n adalah suku terakhir.

7. Jumlah n suku pertama deret geometri dinyatakan dengan:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ atau } \frac{a(r^n-1)}{1-r},\ (r \neq 1)$$

8. Deret geometri tak hingga $|\,r\,|$ adalah $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$.
9. Untuk semua barisan berlaku $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Tugas Kelompok

Berkunjunglah ke koperasi simpan pinjam atau lembaga keuangan lainnya, telitilah sistem simpan pinjam yang diterapkan di dalamnya. Bagaimanakah cara menghitung suku bunga apabila ada anggota yang terlambat membayar?

Apakah permasalahan yang dihadapi lembaga keuangan tersebut berkaitan dengan simpan pinjam? Kemudian selesaikanlah berdasar materi yang telah kalian pelajari.

Refleksi

Baca kembali materi pada bab ini. Catatlah kata-kata atau istilah-istilah sulit yang ada di dalamnya. Selanjutnya carilah materi yang berkaitan di internet atau sumber lain.

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Dari sebuah deret aritmetika diketahui suku ketiga sama dengan 9, sedangkan jumlah suku kelima dan ketujuh sama dengan 36 maka jumlah 10 suku pertamanya adalah . . . .
   a. 98
   b. 115
   c. 140
   d. 150
   e. 165
2. Dari suatu deret aritmetika diketahui jumlah 4 suku pertama sama dengan 17 dan jumlah 8 suku pertama sama dengan 58 maka suku pertama dari deret itu adalah . . . .
   a. 1
   b. $1\frac{1}{2}$
   c. 2
   d. 3
   e. 4

3. Dari barisan aritmetika suku pertamanya sama dengan 2 dan suku ke-25 sama dengan 74 maka besar suku ketiga belas adalah . . . .
   a. 36
   b. 37
   c. 38
   d. 39
   e. 40

4. Diketahui barisan aritmetika 84, $80\frac{1}{2}$, 77, ..., 0 banyaknya suku barisan itu adalah . . . .
   a. 21
   b. 22
   c. 23
   d. 24
   e. 25

5. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n = \frac{n}{2}(3n - 17)$, rumus suku ke-$n$ deret itu adalah . . . .
   a. $3n - 10$
   b. $3n - 8$
   c. $3n - 6$
   d. $3n - 4$
   e. $3n - 2$

6. Suku ketiga dari barisan geometri sama dengan 2, sedangkan suku ke-7 sama dengan $\frac{1}{8}$ maka suku pertamanya adalah . . . .
   a. -8
   b. 8
   c. 4
   d. -4
   e. 2

7. Jika $4a$, $2b$, c berturut-turut adalah 3 suku pertama barisan geometri maka berlaku hubungan . . . .
   a. $b^2 + ac = 0$
   b. $b^2 + ab = 0$
   c. $a^2 - bc = 0$
   d. $b^2 - ac = 0$
   e. $c^2 - ac = 0$

8. Sebuah tali dibagi menjadi 6 bagian dengan panjang membentuk barisan geometri. Jika panjang tali yang terpendek 3 cm dan yang terpanjang 96 cm maka panjang tali semula adalah . . . .
   a. 183 cm
   b. 185 cm
   c. 187 cm
   d. 189 cm
   e. 191 cm

9. Jumlah deret geometri $8 - 4 + 2 - ... - \frac{1}{128}$ adalah ....

a. $-\frac{88}{102}$

b. $\frac{32}{54}$

c. $-\frac{68}{100}$

d. $\frac{1.023}{46}$

e. $\frac{1.032}{192}$

10. Jika tiap sel membelah menjadi 5 sel setiap 10 detik maka jumlah seluruh sel setelah satu menit adalah . . . .

a. 3.906

b. 6.250

c. 1.562

d. 15.625

e. 19.501

11. Jumlah 10 suku pertama deret $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + ...$ adalah . . . .

a. $31 (\sqrt{2} - 1)$

b. $31 (\sqrt{2} + 1)$

c. $31\sqrt{2}$

d. $1.023 (\sqrt{2} + 1)$

e. $1.023 (\sqrt{2} - 1)$

12. Suku pertama dan kedua suatu deret geometri adalah a^{-4} dan a^{x}. Jika suku kedelapan adalah a^{52} maka nilai x sama dengan . . . .

a. –32

b. –16

c. 12

d. 8

e. 4

13. Suatu perusahaan pakaian dapat menghasilkan 5.000 buah baju pada awal berproduksi. Selanjutnya produksi dapat ditingkatkan menjadi 5.050. Bila kemajuan konstan, maka jumlah produksi selama setahun adalah . . . .

a. 5.550 unit

b. 60.000 unit

c. 60.600 unit

d. 63.300 unit

e. 63.000 unit

14. Jika deret geometri konvergen dengan limit $\frac{-8}{3}$ serta suku kedua dan keempat berturut-turut 2 dan $\frac{1}{2}$ maka suku pertamanya adalah . . . .

a. 4
b. 1
c. $\frac{1}{3}$
d. –4
e. –8

15. Selama 5 bulan berturut-turut jumlah penduduk kota A berbentuk deret geometri. Pada tahun terakhir jumlah penduduknya 4 juta, sedangkan jumlah tahun pertama dan ketiga sama dengan 1 juta. Jumlah penduduk kota A pada tahun keempat adalah ....

a. 1,50 juta
b. 1,75 juta
c. 2,00 juta
d. 2,25 juta
e. 2,50 juta

16. Setiap kali Ani membelanjakan bagian dari uang yang masih dimilikinya dan tidak memperoleh pemasukan uang lagi. Jika sisa uangnya kurang dari uangnya semula, berarti Ani paling sedikit sudah belanja ....

a. 4 kali
b. 5 kali
c. 6 kali
d. 7 kali
e. 8 kali

17. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, maka terbentuk sebuah barisan aritmetika yang jumlahnya 30. Hasil kali ketiga bilangan ini adalah ....

a. 64
b. 125
c. 216
d. 343
e. 1.000

18. Di suatu daerah pemukiman baru angka (tingkat) pertumbuhan penduduk adalah 10% per tahun. Kenaikan jumlah penduduk dalam waktu 4 tahun adalah ....

a. 40,0%
b. 42,0%
c. 43,8%
d. 46,4%
e. 61,1%

19. Jika $x - 50$, $x - 14$, $x - 5$ adalah tiga suku pertama suatu deret geometri tak hingga, maka jumlah semua suku-sukunya adalah ....
    a. -96
    b. -64
    c. -36
    d. -24
    e. -12

20. Sepotong kawat panjangnya 124 cm dipotong menjadi lima bagian sehingga panjang potong-potongannya membentuk barisan geometri. Jika potongan kawat yang paling pendek panjangnya 4 cm maka potongan kawat yang paling panjang adalah ....
    a. 60 cm
    b. 64 cm
    c. 68 cm
    d. 72 cm
    e. 76 cm

Latihan Semester 2

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Suku ke-n dari deret aritmatika adalah $3 - 2n$ maka rumus jumlah n suku pertama adalah ....
   a. $S_n = n^2 + n$
   b. $S_n = n^2 + 2n$
   c. $S_n = n^2 - 2n$
   d. $S_n = 2n - n^2$
   e. $S_n = n - n^2$

2. Dari barisan geometri diketahui:
   $U_3 = 72$, $U_7 = 128$, maka a dan r berturut-turut adalah ....
   a. 2 dan 6
   b. 18 dan $\sqrt{2}$
   c. 24 dan $\sqrt{3}$
   d. 36 dan $\sqrt{2}$
   e. 54 dan $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

3. Suku pertama dan kedua suatu deret geometri a^{-4} dan a^x. Jika suku ke-delapan adalah a^{52}, maka nilai x sama dengan ....
   a. –32
   b. –16
   c. 12
   d. 8
   e. 4

4. Tiga bilangan membentuk barisan geometri yang jumlahnya 35 dan hasil kalinya 1.000, bila $r > 1$, maka bilangan terbesar adalah ....
   a. 5
   b. 10
   c. 20
   d. 25
   e. 30

5. Pada deret geometri diketahui $U_5 = 6$ dan $U_2 = 48$, maka jumlah 6 suku pertama adalah ....
   a. 120
   b. 145
   c. 167
   d. 172
   e. 169

6. Jumlah dua suku pertama dari jumlah 4 suku pertama dari deret geometri adalah 8 dan 80, untuk $r > 1$, maka jumlah tiga suku pertama adalah ....
   a. 26
   b. 32
   c. 36
   d. 40
   e. 56

7. Pada deret geometri ditentukan
$S_{n-1} = 63$, $S_n = 127$, dan $S_{n+1} = 255$, maka U_{10} = ...
a. 64
b. 128
c. 256
d. 512
e. 1.204

8. Suku pertama, ketiga, dan kesembilan membentuk barisan aritmatika membentuk barisan geometri yang jumlahnya 26. Jumlah suku ke-4 dan barisan aritmatika dan barisan geometri adalah ....
a. 32
b. 36
c. 48
d. 54
e. 62

9. Suku ke-n dari deret geometri adalah $U_n = 3(4)^{-n}$. Jumlah tak terhingga dari deret tersebut adalah ....
a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

10. Jumlah n suku pertama dari deret bilangan segitiga adalah 220, maka nilai n adalah ....
a. 9
b. 10
c. 11
d. 12
e. 13

11. Jumlah anggota suatu perkumpulan tiap dua tahun bertambah dua kali dari jumlah sebelumnya. Dalam 10 tahun jumlah anggota menjadi 12.800 orang. Jumlah anggota mula-mula adalah ....
a. 320
b. 400
c. 640
d. 980
e. 1.280

12. Pada saat awal diamati ada 8 virus jenis tertentu. Setiap 24 jam masing-masing virus membelah diri menjadi dua. Jika setiap 96 jam, ada seperempat dari seluruh virus dibunuh, maka banyaknya virus pada hari keenam adalah ....
a. 116
b. 128
c. 192
d. 224
e. 256

13. Seorang pegawai setiap tahun mendapat kenaikan gaji yang besarnya tetap. Ia mulai bekerja pada tahun 2000 dengan gaji Rp225.000,00 per bulan, dan tahun 2006 gajinya menjadi Rp465.000,00 tahun 2010 yang akan datang gajinya adalah ....
    a. Rp585.000,00
    b. Rp625.000,00
    c. Rp665.000,00
    d. Rp705.000,00
    e. Rp753.000,00

14. Seorang ayah membagian uang sebesar Rp100.000,00 kepada 4 orang anaknya. Makin muda usia anak makin kecil uang yang diterima. Jika selirih yang diterima oleh setiap dua anak yang usianya berdekatan Rp5.000,00 dan si sulung menerima uang paling banyak, maka jumlah yang diterima oleh si bungsu adalah ....
    a. Rp15.000,00
    b. Rp17.500,00
    c. Rp20.000,00
    d. Rp22.500,00
    e. Rp25.000,00

15. Suatu perusahaan pada tahun pertama memproduksi 5.000 unit barang, pada tahun-tahun berikutnya produksinya turun secara tetap sebesar 80 unit pertahun. Perusahaan tersebut memproduksi 3.000 unit barang pada tahun ke ....
    a. 24
    b. 25
    c. 26
    d. 27
    e. 28

Daftar Pustaka

Alisah, Evawati dan Eko Prasetyo. 2007. *Filsafat Dunia Matematika: Pengantar untuk Memahami Konsep-konsep Matematika.* Jakarta: Prestasi Pustakaraya.

Anton, H. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear (Elementary Linear Algebra) Jilid 1.* Edisi 7. Terjemahan oleh Hari Suminto. Jakarta: Gramedia.

Baan, DE.1985. *Ilmu Ukur.* Jakarta: Pradnya Paramita

Budhi, W.S. 1995. *Aljabar Linear.* Cetakan Pertama. Jakarta: Gramedia.

Borowski, E.J and J.M Borwein. 1989. *Collins Dictionary of Mathematics.* Great Britain: Harper Collins.

Coroneos, TTH.A Higher School Sertificate Course in Mathematics Year Twelve 3 Unit 3-5. Sidney North York Street Sidney.

Harahap, B. 2000. *Ensiklopedia Matematika.* Jakarta: Ghalia Indonesia.

Koesmartono dan Rawuh. 1983. *Matematika Pendahuluan.* Bandung: ITB.

Nasendi, B.D dan Affendi Anwar. 1985. *Program Linear dan Variasinya. Cetakan 1.* Jakarta: Gramedia.

Sumarno, Ade, Baharudin dan Dedi Rohendri. 1980. *Penuntun Pelajaran Matematika.* Bandung; Epsilon Group.

Suryadi, D dan S Harini M. 1984. *Teori dan Soal Pendahuluan Aljabar Linear.* Jakarta: Ghalia

Spiegel, Murray R. 1981. *Teori dan Soal Matematika Dasar.* Jakarta: Erlangga.

Tim. 1979. *Matematika 7-12a untuk SMA.* Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Tim. 2003. *Pedoman Umum Pengembangan Penilaian.* Jakarta: Direktorat Pendidikan Dasar dan Menengah.

Tim. 2003. *Silabus dan Penilaian.* Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Wahyudin dan Sudrajat. 2003. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia.* Jakarta: Tarity Samudra Berlian.

Walpole, Ronald E. 1993. *Pengantar Statistika. Terjemahan oleh Bambang Sumantri.* Jakarta: Gramedia.

Wilardjo, L. 1995. *Pengantar Matematika untuk (maha)siswa Sosial Ekonomi*. Bandung: ITB.

Indeks

Glosarium

Barisan. Urutan bilangan-bilangan menurut suatu aturan tertentu.

Beda. Selisih suku ke dua dengan suku pertama, suku ketiga dengan suku kedua dan seterusnya pada barisan aritmetika.

Bentuk objektif. Fungsi yang dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan) dari model matematika pada program linear.

Deret. Penjumlahan suku-suku suatu bilangan.

Domaian. Daerah asal dari suatu fungsi.

Fungsi. Relasi antara dua himpunan dengan setiap himpunan asal dipasangkan tepat satu unsur dengan himpunan lawan.

Fungsi integral. Fungsi yang dicari integralnya (antideferensialnya).

Fungsi primitif. Fungsi integral yang masih memuat konstanta integrasi.

Fungsi tujuan. Fungsi yang menunjukkan sasaran dari pengoptimalan yang mungkin dicapai berdasar batasan-batasan yang ada pada program linear.

Gradien. Koefisien arah suatu garis lurus.

Himpunan. Kumpulan benda-benda yang jelas (real) atau tidak jelas (abstrak).

Himpunan penyelesaian. Himpunan jawaban dari persamaan atau pertidaksamaan.

Integral atau antidefernensial. Invers dari operasi pendeferensialan untuk menemukan fungsi f jika fungsi turunan f diketahui.

Integral Tertentu. Nilai integral dari suatu fungsi turunan f yang ditentukan pada interval tertentu.

Interval. Selang.

Invers matriks. Matriks kebalikan dari suatu matriks persegi.

Kesamaan matriks. Matriks-matriks dengan ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak dari matriks-matriks tersebut sama.

Matriks identitas. Atau matriks satuan yaitu matriks persegi yang semua unsur diagonalnya sama dengan 1, dan semua unsur yang lain sama dengan 0.

Matriks persegi. Matriks dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom.

Matriks. Jajaran bilangan (biasa disebut unsur atau elemen) yang disusun dalam bentuk baris dan lajur hingga berbentuk persegi panjang.

Ordo matriks. Ukuran baris dan kolom pada matriks.

Pertidaksamaan linear. Pertidaksamaan yang pangkat tertinggi variabelnya adalah satu.

Pertidaksamaan. Kalimat terbuka yang menggunakan tanda ketidaksamaan dan mengandung variabel.

Poligon. Garis yang terbentuk dengan menghubungkan titik tengah-titik tengah setiap puncak histogram.

Rasio. Pembanding antara suku kedua dengan suku pertama, suku ketiga dengan suku kedua, dan seterusnya pada barisan geometri.

Sigma. Jumlah dari bilangan-bilangan.

Transpose matriks. Matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Variabel. Peubah bebas.

Kunci

Bab 1 Program Linear

2. b	4. d	6. b	8. e	10. b	12. e
14. b	16. a	18. b	20. c		

Bab 2 Matriks

2. a	4. b	6. a	8. e	10. d	12. e
14. d	16. c	18. c	20. d		

Bab 3 Barisan dan Deret

2. c	4. e	6. b	8. d	10. d	12. e
14. d	16. b	18. d	20. b		

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Matematika XII Bahasa

Untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah

$a^2 = c$

$ax^2 + bx + c = 0$

ISBN 978-979-068-846-9 (no jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-853-7
Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp 7.708,-