Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 5

Penerapan Trigonometri dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi dalam Kehidupan Sehari-hari

MATEMATIKA
PAKET C SETARA SMA/MA

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 5

Penerapan Trigonometri dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi dalam Kehidupan Sehari-hari

MATEMATIKA
PAKET C SETARA SMA/MA

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip *flexible learning* sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

PENERAPAN TRIGONOMETRI DALAM PENGEMBANGAN ILMU DAN TEKNOLOGI DAN KEHIDUPAN SEHARI-HARI

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini berisi materi tentang konsep dan operasi matematika menggunakan aturan sinus dan cosinus, fungsi trigonometri serta penerapan, penggunaan dan penyelesaian masalah yang melibatkan trigonometri dalam aktifitas sehari-hari di rumah, lingkungan tempat tinggal, dan di masyarakat. Sebelum mempelajari modul ini, Anda sudah harus menguasai *materi prasyarat* yaitu tentang konsep pengukuran dan satuan sudut, sifat-sifat sudut dan perbandingan sisi-sisi pada segitiga.

Untuk memastikan tingkat penguasaan, Anda dapat mengerjakan latihan operasi hitung yang melibatkan fungsi aljabar yang dikenalkan di awal modul. Cara belajar dengan menggunakan modul dapat dilakukan secara mandiri (tanpa bantuan tutor/pendidik), melalui tutorial, atau menggunakan pembelajaran tatap muka seperti yang dilaksanakan dalam sekolah formal. Tata cara penggunaan modul adalah sebagai berikut.

a. Mengikuti jadwal kontrak belajar yang telah disepakati dengan tutor
b. Membaca dan memahami uraian materi pembelajaran
c. Mengidentifikasi materi-materi pembelajaran yang sulit atau perlu bantuan konsultasi dengan tutor, sedangkan materi lainnya dipelajari dan dikerjakan secara mandiri atau penguatan pembelajaran bersama tutor
d. Melaksanakan tugas-tugas dalam modul dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran
e. Mengerjakan soal dan latihan dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran pembelajaran
f. Mengerjakan soal penilaian akhir modul untuk lebih memahami materi pembelajaran dengan benar
g. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan tugas karena keterbatasan sarana, prasarana, alat, media dan bahan belajar yang diperlukan, maka Anda dapat berkonsultasi dengan rekan sejawat untuk merancang tugas alternative yang setara

h. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan soal, latihan dan penilaian akhir modul, maka Anda dapat menggunakan rubrik penilaian, kunci jawaban dan pembahasan yang diberikan diakhir modul agar lebih memahami. Kerjakan ulang soal, latihan dan penilaian akhir sampai Anda yakin tidak mengalami kesulitan mengerjakan soal
i. Apabila Anda mengalami kesulitan atau ingin mendalami lebih lanjut uraian materi, melaksanakan tugas pembelajaran, latihan dan soal yang diberikan belum cukup membuat Anda menguasai kompetensi yang diharapkan, maka Anda perlu mempelajari lebih lanjut referensi dan daftar pustaka suatu materi pembelajaran

Tujuan Pembelajaran Modul

Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:

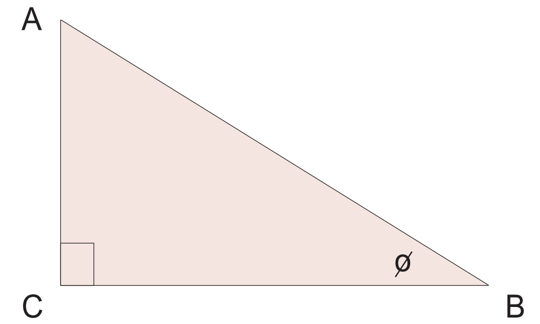
1. Memahami konsep perbandingan trigonometri, aturan sinus dan cosinus, dan penggunaanya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
2. Terampil melakukan operasi matematika yang melibatkan aturan sinus dan cosinus serta penggunaannya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi sehari-hari

Pengantar Modul

Banyak benda atau bangunan memiliki sudut atau pojok tertentu. Bentuk-bentuk sudut dari benda di alam terbentuk dengan sendirinya, seperti sudut dahan dengan ranting, lekukan batuan, dan sebagainya. Bentuk sudut ada yang sengaja dirancang, seperti penggaris berbentuk segitiga, sudut antara dua ruas jalan yang bersilangan, sudut yang terbentuk antara jarum pendek dan jarum panjang dari sebuah jam dinding, bentuk permukaan buku. Model atap rumah biasanya dibuat dengan sudut atau pojok sesuai kebutuhan. Titik sudut sebuah buku biasanya tegak lurus, sedangkan atap rumah sudutnya lebih kecil. Ilmu ukur sudut dipelajari secara khusus dalam trigonometri yang mengkaji hubungan antara sisi dan sudut dalam suatu segitiga dan sifat-sifat serta aplikasinya dalam berbagai bidang seperti penaksiran tinggi gedung atau pohon, jarak mendatar puncak gunung terhadap lembahnya, dan sebagainya. Pada mulanya, trigonometri diterapkan dalam navigasi, survei dan pemetaan, dan astronomi, yang menekankan pada penentuan jarak secara tidak langsung. Aplikasi lainnya diterapkan pada fisika, kimia, *engineering* atau keteknikan, teknik sipil, astronomi, ilmu ukur tanah (topografi), teknik kimia,

optic, oseanografi, teknologi pencitraan dalam bidang kedokteran, khususnya pada penentuan fenomena atau gejala yang bersifat periodik seperti getaran, aliran listrik dan sebagainya.

Satuan sudut yang biasa digunakan adalah derajat (menggunakan simbol °) dan radian (tanpa simbol). Perhatikan perbandingan segitiga siku-siku berikut.



Besar sudut B, atau ∠ABC adalah ϕ, maka perbandingan sisi yang *dihadapi* sudut ϕ terhadap *sisi miring* disebut sinus (disingkat sin) dan perbandingan *sisi dekat* dari sudut ϕ terhadap sisi miring disebut cosinus (disingkat cos). Perbandingan lainnya adalah tangen (disingkat tan), cosecan (disingkat csc), secan (disingkat sec), dan cotangen (disingkat cot), yang didefinisikan sebagai berikut.

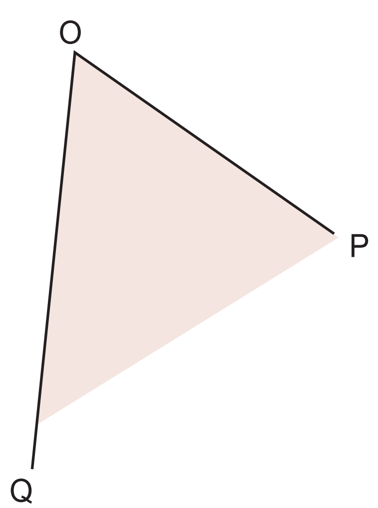
$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}; \cot \phi = \frac{1}{\tan \theta} \qquad \sec \phi = \frac{1}{\cos \theta}; \text{ dan } \csc \phi = \frac{1}{\sin \theta}$$

UNIT 1 SATUAN SUDUT

Mengenal Sudut

1. Apakah pojok dari benda berikut ini, tegak lurus, tidak tegak lurus atau tidak memiliki pojok.
   a. Kubus/balok
   b. Kerucut
   c. Bola
   d. Kardus
   e. Almari
2. Lukislah berbagai benda dengan pojok atau sudut tegak lurus, kecil atau lebar. Bagaimana cara menggambar sudut-sudut tersebut? Jelaskan.
3. Sebuah atap rumah membentuk sudut. Apabila terjadi hujan, maka air hujan mengenai atap. Air hujan akan jatuh m elalui atap lebih cepat pada atap dengan sudut kecil atau yang lebih besar? Jelaskan.

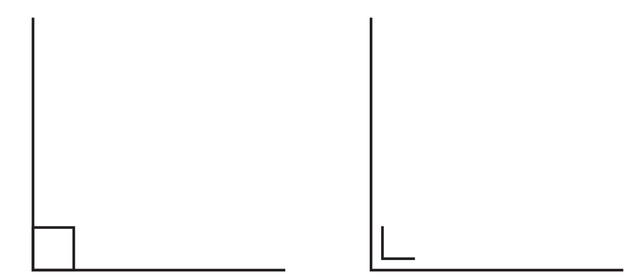
Sekarang kita siap membahas konsep sudut melalui ilustrasi berikut. Perhatikan sudut QOP.



Garis OQ dan OP disebut kaki-kaki sudut dan titik O merupakan titik sudut. Daerah yang dibatasi oleh kaki sudut disebut dengan daerah sudut, dan ukuran besarnya daerah sudut disebut dengan besar sudut.

Garis OQ dan OP membentuk sudut yang disebut dengan sudut POQ, sudut QOP, atau sudut O dan dilambangkan oleh $\angle$ POQ, $\angle$ QOP, atau $\angle$ O.
Perhatikan bahwa nama atau lambang titik sudut, yaitu titik O selalu ditulis ditengah. Kaki-kaki sudut tersebut membatasi dua daerah, yaitu daerah dalam yang berasir dan daerah luar yang tidak berarsir. Untuk selanjutnya, kita menganggap yang dimaksud besar sudut adalah sudut pada *daerah dalam*nya saja kecuali bila disebutkan secara lain. Berdasarkan karakteristik besar sudutnya, terdapat berbagai bentuk sudut, seperti gambar berikut.

Pada gambar di atas, sudut D dan F kita sebut dengan sudut siku-siku yang dibentuk oleh dua garis tegak lurus sebagai kaki-kaki sudutnya. Simbol untuk menyatakan sudut siku-siku biasanya adalah “⌐” atau “□”, yang diletakkan pada titik sudutnya. Besar sudut B dan E disebut sudut lancip yang besar sudutnya lebih kecil dari sudut siku-siku. Sedangkan sudut A dan C disebut sudut tumpul yang besar sudutnya lebih besar dari sudut siku-siku.

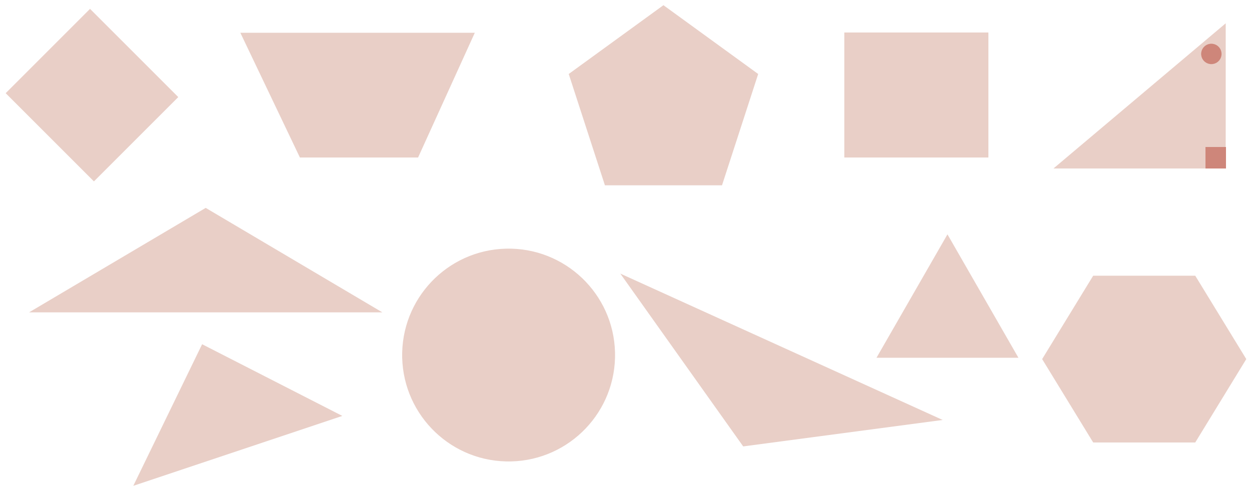


Sudut siku-siku

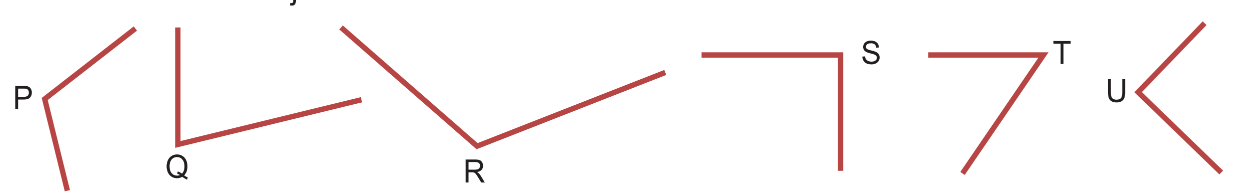
Agar dalam mengukur sudut dihasilkan acuan satuan sudut yang sama, diperlukan satuan standar atau baku untuk sudut. Satuan standar yang biasa digunakan adalah satuan derajat (*degree*). Satuan ini diperoleh dari daerah lingkaran yang dibagi dalam menjadi 360 bagian yang sama dari titik pusatnya. Besar setiap bagiannya adalah 1 derajat dan ditulis 1^0.

Latihan 1

1. Tandai setiap sudut pada bangun berikut dengan:
   “o” untuk sudut lancip,
   “x” untuk sudut tumpul, dan
   “□” untuk sudut siku-siku.

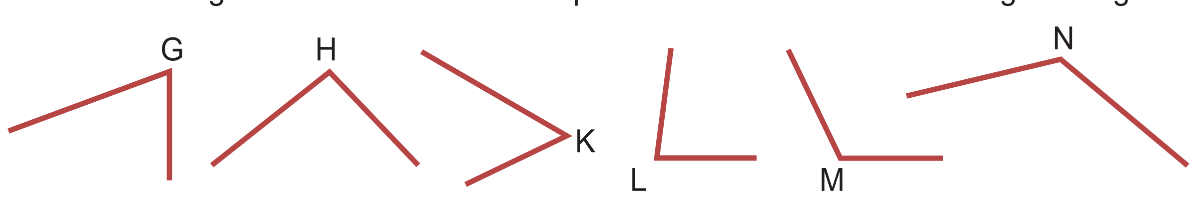


2. Ambillah busur derajat dan ukur besar sudut berikut

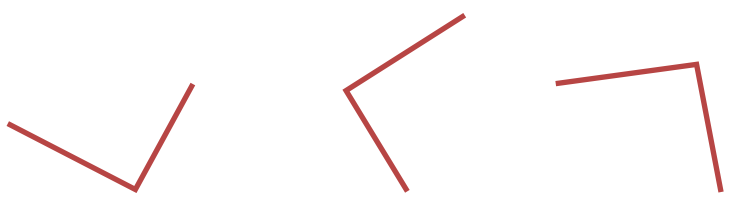


Sudut P = … derajat = …^{0}
Sudut Q = … derajat = …^{0}
Sudut R = … derajat = …^{0}
Sudut S = … derajat = …^{0}
Sudut T = … derajat = …^{0}
Sudut U = … derajat = …^{0}

3. Taksirlah berbagai sudut berikut. Kemudian periksa ketelitian taksiranmu dengan mengukurnya.



4. Gambarlah berbagai sudut:
   a. sebesar 30^0
   b. sebesar 45^0
   c. sebesar 90^0
   d. sebesar 120^0
5. Gambarlah berbagai bentuk sudut yang besarnya 150^0.
   Apakah bangun dengan sudut 150^0 sama dengan bangun dengan sudut 240^0? Jelaskan.
   Gambarlah sudut sebesar:
6. 0^0. Bagaimana bentuk sudutnya? Jelaskan.
   a. 180^0. Bagaimana bentuk sudutnya? Jelaskan.
   b. 225^0. Bagaimana cara Anda menggambarnya? Jelaskan.
   c. 270^0. Bagaimana cara Anda menggambarnya? Jelaskan.
   d. 360^0. Bagaimana bentuk sudutnya? Jelaskan.
7. Ukurlah besar berbagai bentuk sudut siku-siku berikut.



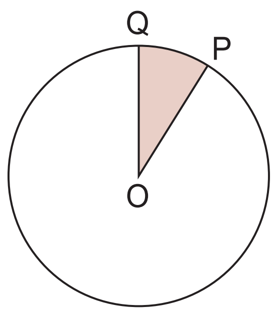
   Apa kesimpulan Anda? Jelaskan.
8. Gambarlah pasangan sudut-sudut berikut.
   a. Sudut 45^0 dan 315^0.
   b. Sudut 90^0 dan 270^0.
   c. Sudut 60^0 dan 300^0.
   Apa kesimpulan Anda? Jelaskan.
9. Atap sebuah rumah membentuk sudut 70^0 dengan arah mendatar.
   a. Gambarkan skema atap rumah tersebut.
   b. Tentukan besar sudut pada puncak rumah tersebut.
10. Sebuah tangga menyandar di dinding dan membentuk sudut 65^0 dengan arah mendatar. Tentukan besar sudut tangga dengan dinding.

(a) Besar sudut siku-siku adalah 90^0.
(b) Sudut 0^0 membentuk sebuah garis lurus dan disebut sudut lurus

Selain derajat, satuan sudut yang banyak digunakan dalam matematika atau perhitungan teknik lainnya adalah satuan radian.

Mengenal Satuan Sudut Radian

1. Gambarlah lingkaran berpusat O dengan jari-jari OP = 7 cm seperti gambar berikut.

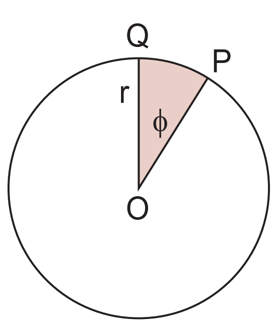


2. Ukurlah berbagai panjang busur PQ dan besar sudut QOP dengan menggunakan benang.
3. Isilah hasilnya pada tabel berikut.

No	Panjang Busur PQ	$\phi = \dfrac{\text{busur PQ}}{\text{jari-jari}}$	Besar Sudut QOP (x^0)
1			
2			
3			
4			
5			

(d) Apa hubungan nilai ϕ dan x^0? Jelaskan.
(a) Dengan menggunakan berbagai panjang busur PQ, tentukan nilai $\dfrac{180^0}{x^0}\phi$. Apa kesimpulan Anda?

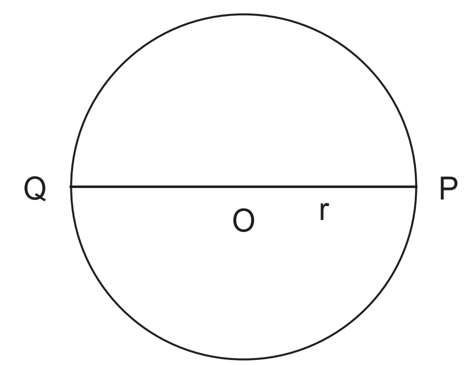
Dari kegiatan di atas, dapat disimpulkan bahwa besaran ϕ dapat digunakan untuk menentukan ukuran atau besar sudut QOP. Kita katakan satuan sudut untuk ϕ dinyatakan dalam radian seperti yang dijelaskan pada bagian berikut.



Besar sudut QOP dalam radian didefinisikan sebagai perbandingan panjang busur PQ terhadap jari-jari lingkaran OA. Jadi,

$$\text{besar } \angle QOP = \phi = \frac{\textit{busur yang dihadapi}}{\textit{jari-jari OP}} = \frac{\textit{busur PQ}}{r}$$

Besar sudut ϕ tersebut merupakan besaran tanpa dimensi karena merupakan hasil bagi besaran dengan satuan yang sama.
Bagaimana hubungan radian dan derajat? Apabila busur PQ diperpanjang menjadi setengah keliling lingkaran diperoleh sebagai berikut.



Sudut QOP merupakan sudut lurus dengan besar 180^0 dan panjang busur PQ = setengah keliling lingkaran = $\frac{1}{2} \times (2\pi r) = \pi r$. Jadi, besar sudut QOP dalam radian adalah

$$= \frac{\textit{busur PQ}}{r} = \frac{\pi}{r} = \pi$$

Dapat disimpulkan bahwa $180^0 = \pi$ (dalam radian).

Dari hubungan ini, kita dapat menyatakan besar sudut dari derajat ke radian dan sebaliknya.

Contoh 1:
Berapa derajatkah besar sudut sebesar 1 radian?

Penyelesaian:
Misalkan jawabnya adalah x. Kita gunakan perbandingan senilai sebagai berikut.

$$180^0 \propto \pi$$
$$x \propto 1$$

Sehingga, $180^0 \times 1 = \pi x$. Akibatnya,
$x = 180^0/\pi = 57.296^0$.
Jadi, 1 radian = 57.296^0.

Contoh 2:

Berapa radian besar sudut sebesar 45 derajat?

Penyelesaian:

Misalkan jawabnya adalah x. Kita gunakan perbandingan senilai sebagai berikut.

$180^0 \quad \propto \quad \pi$

$45^0 \quad \propto \quad x$

Sehingga, $180^0 \times x = 45^0 \times \pi$. Akibatnya,

$$x = \frac{45^0}{180^0}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

Jadi, $45^0 = \frac{1}{4}\pi$

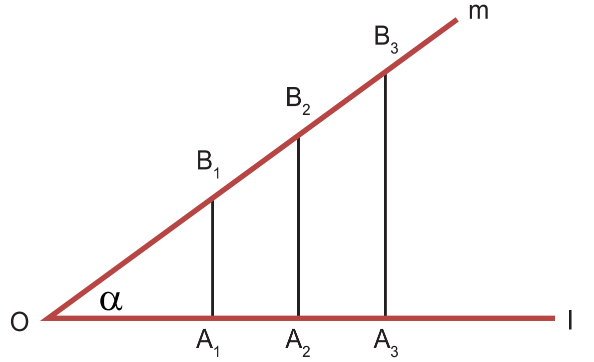
Latihan 2

1. Nyatakan sudut berikut dalam radian
   a. 270^0
   b. 0^0
   c. 360^0
   d. -45^0
2. Berapa radian jarak putar jarum menit sebuah jam apabila ia berputar selama
   a. a. 15 menit
   b. b. 30 menit
   c. c. 45 menit
   d. d. 60 menit
   e. 1 menit
   f. 90 menit
   g. 30 detik
   h. 1 jam
3. Berapa radian sudut yang dibentuk oleh jarum panjang dan jarum pendek sebuah jam pada pukul :
   a. 09.00
   b. 06.00
   c. 03.00
   d. 12.00
   e. 06.30
   f. 09.30

UNIT 2 PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

Perbandingan Sisi-sisi Pada Segitiga Siku-siku

Sekarang perhatikan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku, seperti gambar berikut.



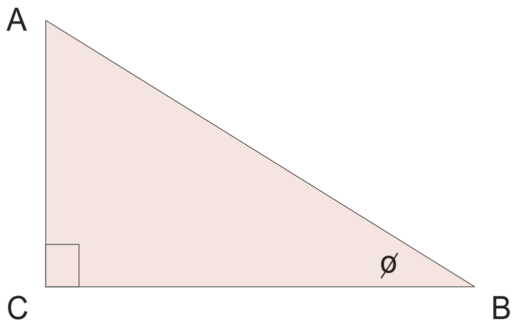
Garis l dan m berpotongan di O dan membentuk sudut sebesar α (di baca 'alfa'). Garis A_1B_1, A_2B_2, dan A_3B_3 adalah tegak lurus dengan garis l.

a. Jiplaklah gambar di atas dan ukur panjang OB_1, OB_2, dan OB_3 serta panjang garis OA_1, OA_2, dan OA_3

b. Ukurlah besar sudut α. Tentukan perbandingan $A_1B_1 : OB_1$, $A_2B_2 : OB_2$, dan $A_3B_3 : OB_3$. Apakah kesimpulan Anda? Jelaskan.

c. Apabila nilai α berubah apakah perbandingan sisi-sisi tersebut juga berubah? Jelaskan.

Dari kegiatan di atas dapat disimpulkan bahwa perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku yang dihadapi suatu sudut adalah tertentu. Perhatikan gambar berikut.



Besar sudut B adalah ϕ (dalam radian). Perbandingan sisi yang dihadapi sudut ϕ terhadap sisi miring disebut sinus (disingkat sin) dan perbandingan sisi dekat sudut pkn terhadap sisi miring disebut cosinus (disingkat cos). Jadi,

$$\sin \phi = \frac{\text{sisi hadap}}{\text{sisi miring}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos \phi = \frac{\text{sisi dekat}}{\text{sisi miring}} = \frac{BC}{AB}$$

Perbandingan lainnya adalah tangen (disingkat tan), cosecan (disingkat csc), secan (disingkat sec), dan cotangen (disingkat cot), yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{AC}{BC}\ ;\ \cot \phi = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sec \phi = \frac{1}{\cos \theta};\ \text{dan } \csc \phi = \frac{1}{\sin \theta}$$

Perhatikan contoh beberapa nilai trigonometri dari beberapa jenis sudut tertentu, yang dicari dengan cara berikut.

Sudut 30^0 dan 60^0

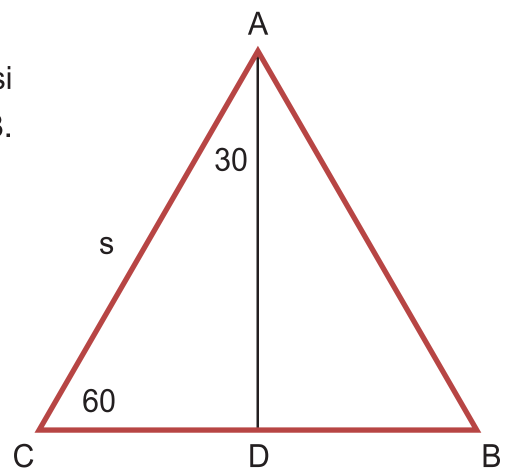
Segitiga ABC merupakan segitiga sama sisi dengan sisi s dan garis AD adalah garis tinggi sehingga CD = DB. Akibatnya,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$AD^2 = s^2 - (\frac{1}{2}BC)^2$

$= s^2 - (\frac{1}{2}s)^2 = \frac{3}{4}s^2$

$AD = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$



Menurut definisi, diperoleh

$$\sin 60^0 = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s\sqrt{3}}{s} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^0 = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s}{s} = \tfrac{1}{2}$$

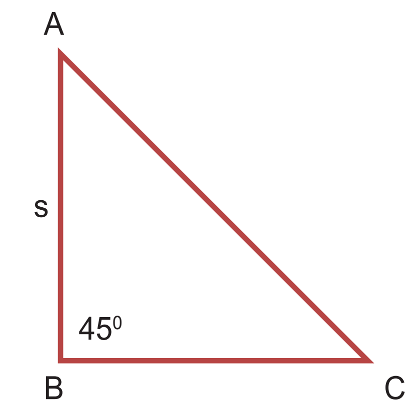
$$\tan 60^0 = \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}s\sqrt{3}}{\frac{1}{2}s} = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^0 = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s}{s} = \tfrac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}s\sqrt{3}}{s} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^0 = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}s\sqrt{3}} = 1/3\sqrt{3}$$

Sudut 45^0



Segitiga ABC merupakan segitiga sama kaki yang siku-siku di B. Sisi AB = sisi BC = s. Akibatnya, sudut A = sudut C dan

AC2 = AB2 + BC2

= s2 + s2 = 2s2

AC = $s\sqrt{2}$ Menurut definisi, diperoleh

$$\sin 450 = \frac{AB}{AC} = \frac{s}{s\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 450 = \frac{BC}{AC} = \frac{s}{s\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 450 = \frac{AB}{BC} = \frac{s}{s} = 1$$

Sudut 0^0 dan 90^0

Secara geometris, segitiga siku-siku dengan salah satu sudut lainnya 0^0 atau 90^0 akan berbentuk garis lurus sehingga nilai trigonometrinya adalah sebagai berikut.

$\sin 0^0 = 0$	$\sin 90^0 = 1$
$\cos 0^0 = 1$	$\cos 90^0 = 0$
$\tan 0^0 = 0$	$\tan 90^0$ = tak didefinisikan.

Nilai trigonometri dari sebuah sudut dapat dicari dengan menggunakan tabel trigonometri atau dengan menggunakan kalkulator ilmiah (*scientific calculator*). Yang perlu dicermati, kita harus menentukan dulu satuan sudut yang digunakan. Satuan derajat menggunakan simbol " ^{0} ", sedangkan radian tidak menggunakan satuan ukuran (tanpa dimensi).

Contoh:

Tentukan nilai trigonometri berikut.

a. $\sin 45^0$	c. $\cos 20^0$
b. sec 0.45	d. tan 1.2

Penyelesaian:

Dengan melihat satuan yang digunakan, kita dapat menentukan nilai trigonometrinya melalui kalkulator, sebagai berikut.

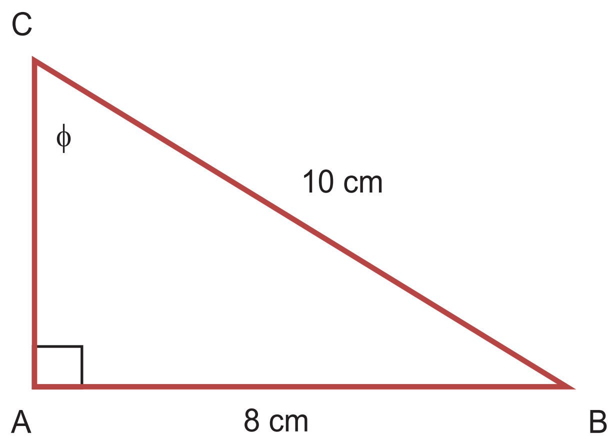
a. $\sin 45^0 = 0.70711$

b. $\sec 0.45 = \frac{1}{\cos 0.45} = \frac{1}{0.90045} = 1.11056$

c. cos 20^0 = 0.9397
d. tan 1.2 = 2.572152

Contoh:
Perhatikan segitiga ABC yang siku-siku di A berikut. Tentukan:

a. Panjang AB
b. sin ϕ, cos ϕ dan tan ϕ
c. cot ϕ, sec ϕ dan csc ϕ



Penyelesaian:
Dengan menggunakan dalil Pythagoras, diperoleh

$AB^2 = BC^2 - AC^2$
$= 10^2 - 8^2 = 36$
$AB = \sqrt{36} = 6$

Jadi, panjang AB adalah 6 cm

$$\sin\phi = \frac{\textit{sisi hadap}}{\textit{sisi miring}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\cos\phi = \frac{\textit{sisi dekat}}{\textit{sisi miring}} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3} \qquad \cot\phi = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3}{4}$$

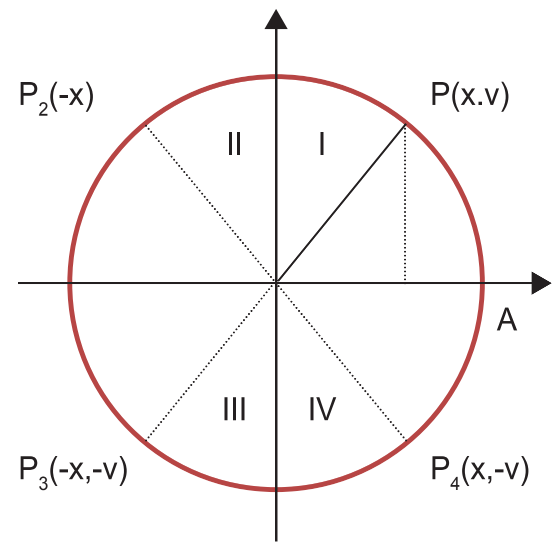
$$\sec\phi = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$$

$$\csc\phi = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Latihan 1

1. Segitiga ABC siku-siku di C. Apabila sin A = 0.5, tentukan:
   a. cos A dan tan A
   b. sec A dan cot A
2. Dengan menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, tentukan nilai trigonometrinya:
   a. sin 20^0
   b. tan 0.1
   c. cos 70^0
   d. d. csc 88^0
   e. e. cot 0.33
   f. f. tan 78^0
3. Seseorang melihat puncak pohon dengan sudut α. Apabila cos α = 0.88 dan jarak orang tersebut ke pohon adalah 15 meter, maka:
   a. Gambarkan sketsa kedudukan pohon dan orang tersebut.
   b. Tentukan tinggi pohon tersebut.
4. Gambarlah segitiga PQR yang siku-siku di P. Apabila sisi-sisi segitiga adalah p, q dan r, tuliskan rumus Pythagorasnya. Tentukan:
   a. sin P dan tan P
   b. sec P dan cot P
5. Sisi-sisi sebuah segitiga adalah r, a, dan b. Apabila $a^2 = b^2 + r^2$, apakah segitiga tersebut siku-siku? Jelaskan. Apabila salah sudut segitiga tersebut adalah α dan sin $\alpha = \frac{r}{a}$, maka tentukan:
   a. cos α dan tan α
   b. sec α dan cot α
6. Sisi-sisi sebuah segitiga ABC adalah a, b, dan c.
   a. Gambarkan se gitiga tersebut.
   b. Tuliskan rumus untuk mencari salah satu tinggi dari segitiga tersebut
   c. Tentukan nilai sin A dan tan A

Kita telah menentukan nilai perbandingan trigonometri dari sudut lancip pada segitiga siku-siku. Konsep ini dapat diperluas untuk berbagai besar sudut. Perhatikan gambar sistem koordinat yang terbagi menjadi kuadran I, kuadran II, kuadran III, dan kuadran IV berikut.



Sebuah titik bergerak mengelilingi lingkaran berjari-jari r mulai dari titik A dan sampai di titik P(x, y) pada kuadran I. Dari sini diperoleh bahwa:

$$\sin\phi = \frac{y}{r};\ \cos\phi = \frac{x}{r};\ \tan\phi = \frac{y}{x}$$

Nilai trigonometri di kuadran I adalah positif

Apabila titik tersebut bergerak ke kuadran II sampai di P_2(-x, y), maka sudut yang dibentuk adalah $\pi - \phi$. Nilai trigonometrinya adalah:

$$\sin(\pi-\phi) = \frac{y}{r} = \sin\phi$$

$$\cos(\pi-\phi) = \frac{-x}{r} = \frac{x}{r} -\cos\phi$$

$$\tan(\pi-\phi) = \frac{y}{-x} = \frac{y}{x} = -\tan\phi.$$

Kesimpulan:
$\sin(\pi-\phi) = \sin\phi$
$\cos(\pi-\phi) = -\cos\phi$
$\tan(\pi-\phi) = -\tan\phi$

Nilai sinus di kuadran II adalah positif

Di kuadran III, titik tersebut sampai di P_3(-x, -y). Nilai trigonometrinya adalah:

$$\sin(\pi+\phi) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}\ -\sin\phi$$

$$\cos(\pi+\phi) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}\ -\cos\phi$$

$$\tan(\pi+\phi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\phi$$

Kesimpulan:
$\sin(\pi+\phi) = -\sin\phi$
$\cos(\pi+\phi) = -\cos\phi$

Nilai tangen di kuadran III adalah positif

Di kuadran IV, titik tersebut sampai di P_4(x, -y) dengan sudut $2\pi - \phi$ atau $-\phi$ (arah negatif, searah jarum jam). Nilai trigonometrinya adalah:

$$\sin(2\pi-\phi) = \sin-\phi = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}\ -\sin\phi$$

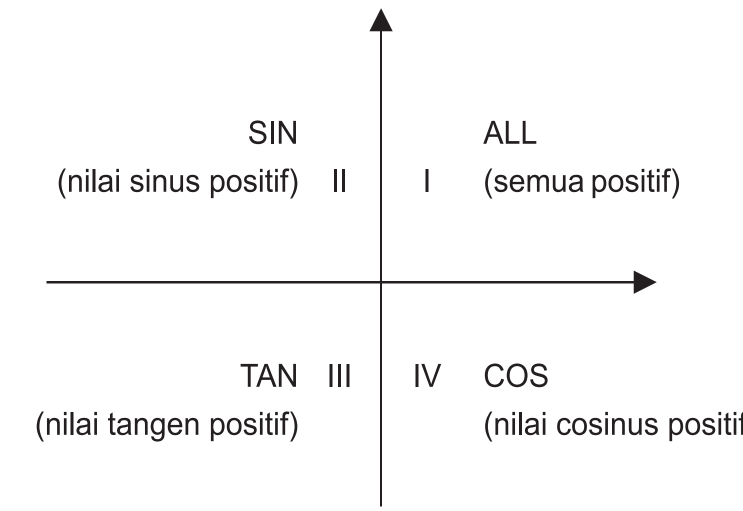
$$\cos(2\pi-\phi) = \cos-\phi = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

$$\tan(2\pi-\phi) = \tan-\phi = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan\phi$$

Kesimpulan:
$\sin(-\phi) = -\sin\phi$
$\cos(-\phi) = \cos\phi$

Nilai cosinus di kuadran IV adalah positif. Apabila titik tersebut bergerak sampai titik P lagi, maka sudut yang ditempuh adalah $2\pi + \phi$. Akibatnya,

$$\sin(2\pi+\phi) = \sin\phi$$
$$\cos(2\pi+\phi) = \cos\phi$$
$$\tan(2\pi+\phi) = \tan\phi$$



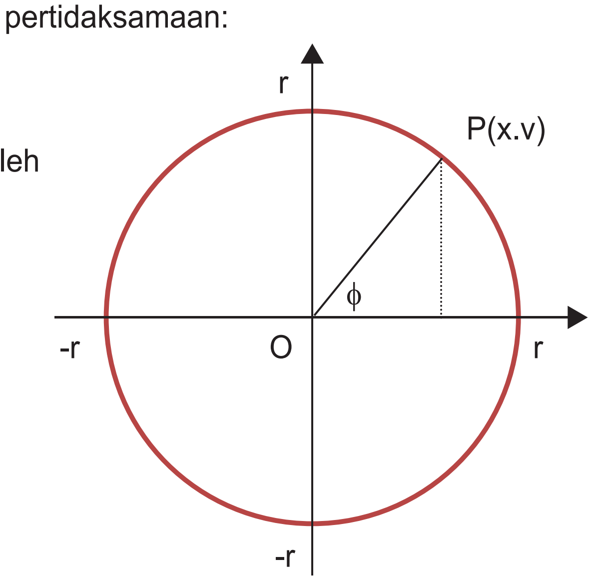
Bagaimana batas-batas nilai trigonmetri? Sekarang perhatikan lingkaran berjari-jari r dengan pusat O berikut. Titik P(x, y) terletak pada lingkaran tersebut.
Dari gambar tampak bahwa nilai x dan y memenuhi pertidaksamaan:

$$-r \le x \le r \text{ dan } -r \le y \le r$$

Dengan membagi dengan r (r adalah positif), diperoleh

$$-1 \le \frac{x}{r} \le 1 \text{ dan } -1 \le \frac{y}{r} \le 1, \text{ atau}$$

$$-1 \le \cos\phi \le 1 \text{ dan } -1 \le \sin\phi \le 1, \text{ atau}$$



Dengan menggunakan dalil Pythagoras, kita juga memperoleh persamaan lingkaran berikut.

$x^2 + y^2 = r^2$

Dengan membagi dengan r^2, diperoleh

$(\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{r})^2 = 1$, atau

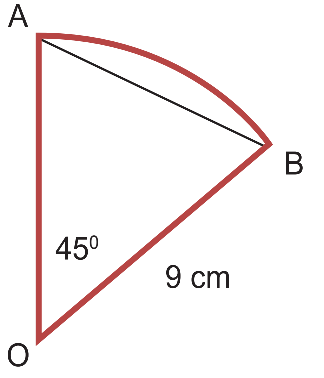
$(\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2 = 1$, atau $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$

Latihan 2

1. Dengan menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, tentukan nilai trigonometrinya:
   a. sin 120^0
   b. tan 7
   c. cos 170^0
   d. csc 288^0
   e. cot 4.33
   f. tan 200^0
2. Tentukan nilai trigonometri berikut.
   a. sin -30^0
   b. tan -5
   c. cos -220^0
   d. csc -45^0
   e. cot -4.12
   f. tan -200^0
3. Apakah sin 30^0 = cos 60^0? Jelaskan. Tunjukkan bahwa $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$.
4. Apabila sin a = 0.456, tentukan cos a.
5. Segitiga ABC siku-siku di C. Nilai sin A = t, tentukanlah nilai trigonometri berikut dinyatakan dalam t.
   a. cos A
   b. tan A
   c. sec B
   d. sin B
6. Titik sudut segitiga OPA adalah O(0, 0), P(-5, 12) dan A(5, 0). Besar sudut AOP adalah ϕ.
   a. Sudut ϕ tumpul atau lancip?
   b. Tentukan $\sin \phi$, $\cos \phi$, dan $\tan \phi$

Latihan 3

1. Tentukan dengan menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator.
   a. sin 30^0
   b. cos 60^0
   c. tan 45^0
   d. sin 45^0
   e. sin 15^0
   f. cos 30^0
   g. tan 60^0
   h. sin 45^0
2. Apabila tan A = ¾ dan sudut A di kuadran III, tentukan: sin A dan cos A
3. Nyatakan apakah setiap nilainya negatif atau positif
   a. cos 340^0
   b. tan $2\pi/3$
4. Apabila cos C = 15/17 dan sudut C di kuadran IV, maka tentukan:
   a. $\sin^2 C + \cos^2 C$
   b. $\csc^2 C - \cot^2 C$
5. Segitiga ABC siku-siku di B dan sudut BAC = 30^0. Apabila AC = 20 cm, tentukan tentukan panjang AB dan BC.
6. Seorang anak memandang sebuah pohon dengan sudut 60^0. Apabila jarak anak tersebut 60 meter dari pohon, tentukan tinggi pohon tersebut.
7. Perhatikan sektor lingkaran berikut.

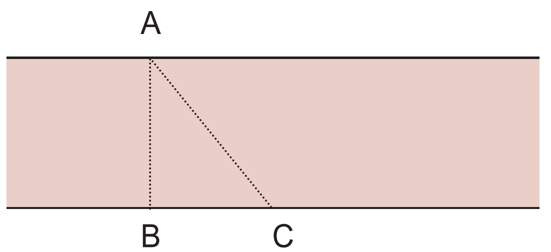


Tentukan panjang tali busur AB

8. Tentukan besar sudut α sehingga $\sin \alpha = \cos \alpha$. Ada berapa jawab yang Anda dapat? Jelaskan.

Latihan 4

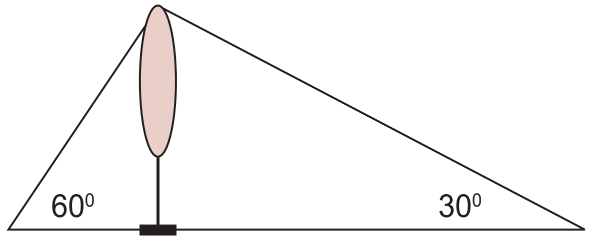
1. Ali akan mengukur tinggi pohon cemara. Dia menancapkan tongkat di atas tanah dan menunggu hingga panjang bayangan sinar matahari dari tongkat sama dengan tinggi tongkatnya.
   a. Gambarkan skema tongkat, pohon cemara dan bayangannya.
   b. Apabila sudut sudut sinar matahari dengan tanah adalah β, tentukan besar β?
   c. Tentukan sin β, cos β dan tan β
   d. Apabila bayangan pohon cemara sejauh 12 meter pada saat itu, berapa tinggi pohon cemara?
2. Sebuah tangga menyandar pada tembok dan membentuk sudut 30 derajat dengan tanah.
   a. Gambarkan skema tangga tersebut.
   b. Apabila panjang tangga 7 meter, berapa jarak tembok ke tempat tangga menumpu di tanah?
   c. Tentukan panjang tangga tersebut.
3. Sebuah segitiga ABC siku-siku di C. Apabila sudut ABC = 60^0, maka:
   a. Gambarkan segitiga tersebut.
   b. Tentukan perbandingn BC : AC : AB
   c. Berapakah sin 60^0, cos 60^0, dan tan 60^0.
4. Seorang anak menyeberang sungai selebar 15 meter dengan berenang. Kecepatan aliran sungai adalah 2 meter per detik . Kecepatan berenang anak tersebut 1.5 meter per detik. Diagram tempat anak memulai berenang (A) di tepi sungai, titik B di seberang sungai sehingga garis AB tegak lurus dengan tepi sungai dan titik C tempat anak tersebut sampai di tepi sungai adalah sebagai berikut.



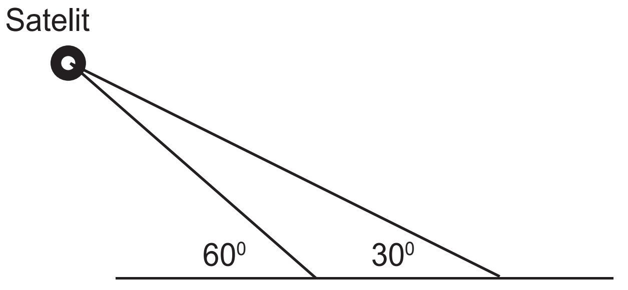
   a. Setelah berapa detik anak tersebut sampai di tepi sungai?
   b. Berapa jauh anak berenang dari A sampai C?
   c. Berapakah sudut BAC dan sudut BCA?
5. Perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku adalah 3 : 4 : 5. Apabila salah satu sisinya adalah 10 cm, tentukan sisi-sisi yang lain. Ada berapa jawab yang Anda dapat? Jelaskan. Tentukan besar sudut-sudut dalam segitiga tersebut

Latihan 5

1. Tentukan tinggi menara apabila dipandang dengan sudut elevasi 35° dan jaraknya dari pengamat 100 m.
2. Tentukan tinggi menara apabila dipandang dengan sudut elevasi 15° dan jaraknya dari pengamat 100 m.
3. Seorang berdiri di puncak gedung dan melihat mobil di jalan raya dengan sudut depresi 40°. Tentukan jarak mobil ke gedung tersebut apabila tinggi gedung 30 m.
4. Dua anak mengamati puncak pohon dari tempat yang berseberangan seperti tampak pada gambar di bawah ini. Apabila anak pertama melihat dengan sudut elevasi 60° dan anak kedua dengan sudut elevasi 40° dan jarak kedua anak tersebut 200 m. Tentukan tinggi pohon tersebut!



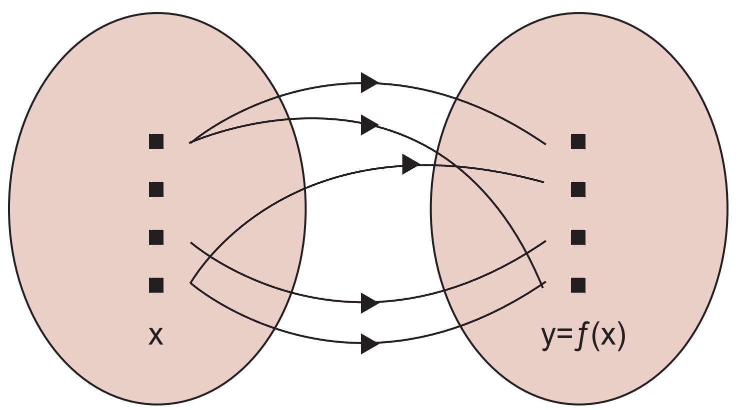
5. Sebuah satelit yang diamati dua pengamat Sudut elevasi masing-masing pengamat adalah 60° dan 30°, seperti tampak pada gambar berikut :



Apabila jarak kedua pengamat tersebut adalah 5 km. Tentukan tinggi satelit tersebut!

UNIT 3 PERSAMAAN DAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi merupakan salah satu bentuk persamaan. Dalam matematika, fungsi merupakan istilah yang digunakan untuk menunjukkan hubungan, kaitan, atau relasi antara dua besaran. Sebuah *fungsi* f adalah aturan yang memadankan tiap objek x dari himpunan pertama (disebut dengan *daerah asal, daerah definisi*) dengan nilai unik y = f(x) dari himpunan kedua (disebut dengan *daerah nilai*).



Daerah Asal Daerah Hasil

Aturan fungsi yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah berubahnya suatu besaran akan mengakibatkan berubahnya besaran lain. Misalnya:

a. Makin tinggi biaya produksi, maka makin tinggi harga jualnya
b. Makin jauh jarak dua benda, maka makin kecil gaya tarik
c. Makin tinggi kecepatan kendaraan, makin cepat waktu yang dibutuhkan untuk sampai

Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal (misalnya f, g, atau H). Maka f(x), dibaca "f dari x atau f pada x", menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Misalnya, $f(x) = x^2 – 1$, maka:

$f(2) = 2^2 – 1 = 4 – 1 = 3$
$f(-1) = (-1)^2 – 1 = 1 – 1 = 0$
$f(a) = a^2 – 1$
f(2a) = (2a)2 – 1 = 4a2 – 1

Pada bagian ini, kita akan mempelajari fungsi trigonometri sederhana, yaitu fungsi sinus, fungsi cosinus, dan fungsi tangen.

Fungsi Sinus

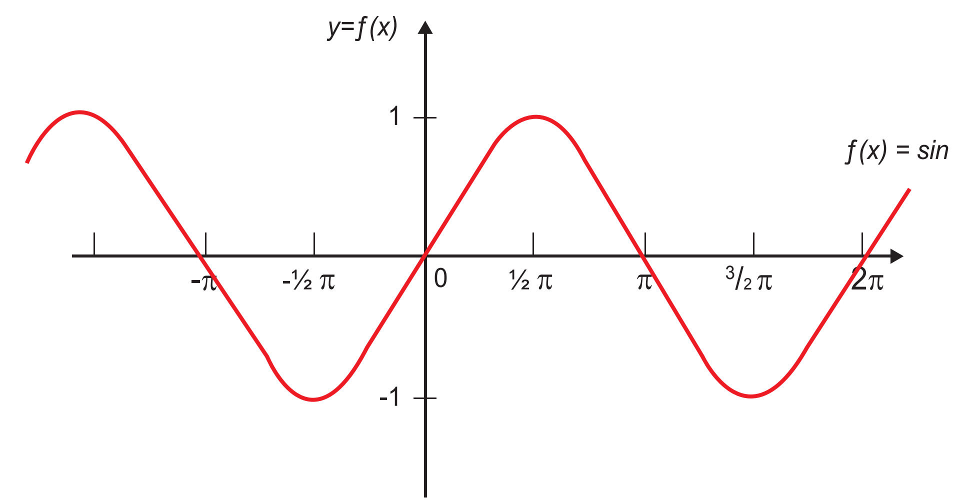
Sebuah fungsi sinus sederhana dapat didefinisikan sebagai **f(x) = sin x**

Daerah asal fungsi tersebut dapat dipilih berupa bilangan real (satuan sudut yang digunakan adalah radian) atau menggunakan satuan sudut derajat. Grafik fungsi sinus adalah grafik berbentuk sinusoid dari persamaan y = f(x) = sin x dan dapat dibuat dengan cara berikut.

1. Kita gunakan satuan sudut radian. Buatlah tabel nilai untuk beberapa titik yang memenuhi persamaan

x	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π
y	0	-1	0	1	0

2. Tandai titik-titik tersebut pada bidang koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut kurva mulus



Dari grafik fungsi sinus tampak bahwa fungsi sinus memiliki periode 2π, misalkan

$\sin(-\pi) = \sin(-\pi + 2\pi) = \sin \pi = 0$,
$\sin(-\frac{1}{2}\pi) = \sin(-\frac{1}{2}\pi + 2\pi) = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$,
$\sin 0 = \sin(0 + 2\pi) = \sin 2\pi = 0$,
Jadi, dapat dituliskan $f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$

Penugasan 1

1. Dari grafik fungsi sinus di atas, tentukanlah:
   a. nilai maksimum fungsi sinus
   b. nilai minimum fungsi sinus

2. Berdasarkan grafik tersebut, tentukan dua nilai x yang memenuhi apabila:
   a. sin x = -1
   b. sin x = ½

Dari kegiatan tersebut dapat disimpulkan bahwa nilai fungsi sinus antara –1 sampai 1 atau dapat dituliskan sebagai **-1 ≤ sin x ≤ 1**

Apabila nilai sinus sebuah sudut adalah tertentu, tetapi kebalikannya tidak demikian, yaitu terdapat berbagai besar sudut yang nilai sinusnya sama. Misalnya, jika sin x = 0.5, beberapa nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}$, $2\pi + \frac{1}{6}$, $2\frac{1}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi$, dan seterusnya. Secara umum dapat dituliskan,

Jika y = sin x, maka x = arc sin y (dibaca 'arcus sinus dari y'), atau

x = $\sin^{-1}$ y (dibaca 'sinus invers dari y')

Pada kalkulator ilmiah, nilai arcus sinus atau sinus invers dari sebuah sudut diberikan untuk –½π sampai ½π.

Contoh:
1. Tentukan nilai x, apabila sin x = 0.475
2. Tentukan nilai t apabila sin t = -0.866. Berikan jawabnya dalam satuan derajat.

Penyelesaian:
1. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode radian) diperoleh $\sin^{-1}$ 0.475 = 0.49496
   Sinus sebuah sudut bernilai positif pada kuadran I dan II, jadi nilai x yang lain adalah π - 0.49496 = 2.6466. Karena fungsi sinus berperiode 2π, maka x =0.49496 + n(2π) atau x = 2.6466 + n(2π), untuk n bilangan bulat.
2. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode derajat) diperoleh $\sin^{-1}$ –0.866 = -59.9971^0
   Sinus sebuah sudut bernilai negatif pada kuadran III dan IV. Nilai pada kuadran IV adalah -59.9971^0, jadi nilai x yang lain adalah –(180^0 - 59.9971^0)= -120.0029^0. Karena fungsi sinus berperiode 360^0, maka x =-59.9971^0 + n(360^0) atau x = -120.0029^0 + n(360^0), untuk n bilangan bulat.

Fungsi Cosinus

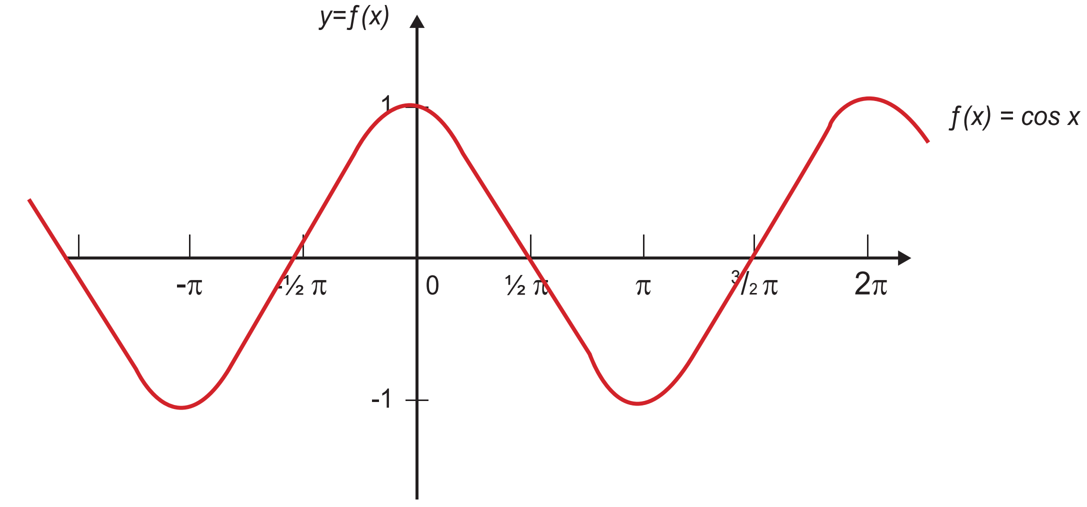
Sebuah fungsi cosinus sederhana dapat didefinisikan sebagai **f(x) = cos x**

Daerah asal fungsi tersebut dapat dipilih berupa bilangan real (satuan sudut yang digunakan adalah radian) atau menggunakan satuan sudut derajat. Grafik fungsi sinus adalah grafik berbentuk sinusoid dari persamaan y = f(x) = sin x dan dapat dibuat dengan cara berikut.

1. Kita gunakan satuan sudut radian. Buatlah tabel nilai untuk beberapa titik yang memenuhi persamaan

x	-π	-½π	0	½π	π
y	-1	0	1	0	1

2. Tandai titik-titik tersebut pada bidang koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut kurva mulus



Dari grafik fungsi cosinus tampak bahwa fungsi cosinus memiliki periode 2π, misalkan

cos (-π) = cos (-π + 2π) = cos π = -1,

cos (-½π) = cos (-½π + 2π) = cos $\frac{3}{2}\pi$ = 0,

cos 0 = cos (0 + 2π) = cos 2π = 1,

Jadi, dapat dituliskan f(x) = cos x = cos (x + 2π)

Penugasan 2

1. Dari grafik fungsi cosinus di atas, tentukanlah:
   a. Nilai maksimum fungsi cosinus
   b. Nilai minimum fungsi cosinus
2. Berdasarkan grafik di atas, tentukan dua nilai x yang memenuhi apabila:
   a. cos x = -1
   b. cos x = ½

Dari kegiatan di atas dapat disimpulkan bahwa nilai fungsi cosinus antara –1 sampai 1 atau dapat dituliskan sebagai **-1 ≤ cos x ≤ 1**

Apabila nilai cosinus sebuah sudut adalah tertentu, tetapi kebalikannya tidak demikian, yaitu terdapat berbagai besar sudut yang nilai cosinusnya sama. Misalnya, jika cos x = 0.5, beberapa nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}$-π, $2\pi + \frac{1}{3}\pi$, $2\pi + \frac{1}{3}\pi$, dan seterusnya. Secara umum dapat dituliskan,

Jika y = cos x, maka x = arc cos y (dibaca ‘arcus cosinus dari y’), atau

x = cos –1 y (dibaca ‘cosinus invers dari y’)

Pada kalkulator ilmiah, nilai arcus cosinus atau cosinus invers dari sebuah sudut diberikan untuk 0 sampai π.

Contoh:

1. Tentukan nilai x, apabila cos x = 0.475
2. Tentukan nilai t apabila cos t = -0.866. Berikan jawabnya dalam satuan derajat.

Penyelesaian:

1. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode radian) diperoleh $\cos^{-1}$ 0.475 = 1.07583
   Cosinus sebuah sudut bernilai positif pada kuadran I dan IV, jadi nilai x yang lain adalah -1.07583. Karena fungsi cosinus berperiode 2π, maka x =1.07583 + n(2π) atau x = -1.07583 + n(2π), untuk n bilangan bulat.
2. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode derajat) diperoleh $\cos^{-1}$ –0.866 = 149.9971^0 (kuadran II)
   Cosinus sebuah sudut bernilai negatif pada kuadran II dan III. Nilai pada kuadran III adalah $180^0 + 30.0029^0 = 210.00291^0$, jadi nilai x yang lain adalah 210.00291^0. Karena fungsi cosinus berperiode 360^0, maka x =149.9971^0 + n(360^0) atau x = 210.00291^0.+ n(360^0), untuk n bilangan bulat.

Fungsi Tangen

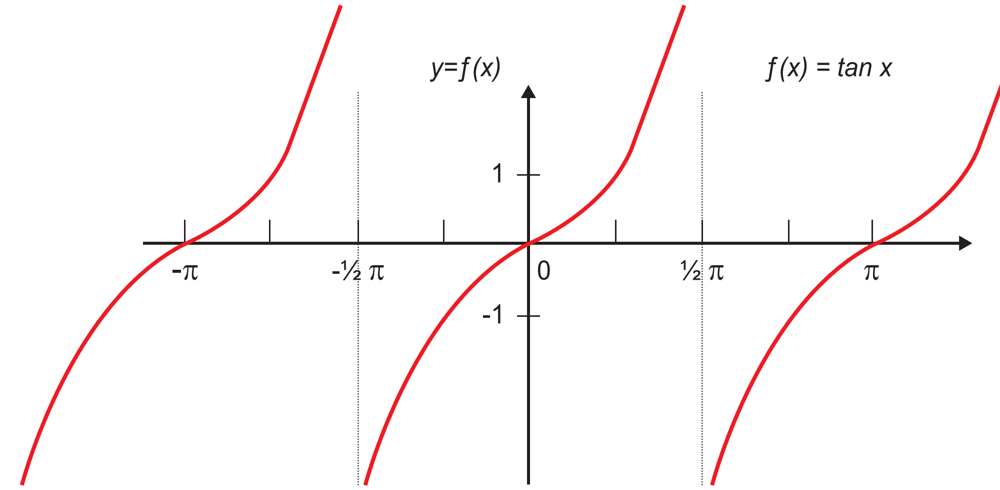
Sebuah fungsi tangen sederhana dapat didefinisikan sebagai **f(x) = tan x**

Daerah asal fungsi tersebut dapat dipilih berupa bilangan real (satuan sudut yang digunakan adalah radian) atau menggunakan satuan sudut derajat. Grafik fungsi tangen tidak berbentuk sinusoid dari persamaan y = f(x) = tan x dan dapat dibuat dengan cara berikut.

1. Kita gunakan satuan sudut radian. Buatlah tabel nilai untuk beberapa titik yang memenuhi persamaan

x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
y	0	1	-	-1	0	1	-	-1	0

2. Tandai titik-titik tersebut pada bidang koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut kurva mulus



Dari grafik fungsi tangen tampak bahwa fungsi tangen memiliki periode π. Pada gambar juga tampak nilai tangen membesar tanpa batas atau tak hingga (biasa dilambangkan dengan ∞) untuk x mendekati $\frac{1}{2}\pi$ dari kiri dan mengecil tanpa batas atau negatif tak hingga (dilambangkan dengan -∞) untuk x mendekati $\frac{1}{2}\pi$ dari kanan. Hal ini berulang untuk setiap periode sebesar π. Karenan periode fungsi adalah π, maka dapat dituliskan **f(x) = tan x = tan (x + π)**

Penugasan 3

1. Dari grafik fungsi tangen di atas, tentukanlah:
   a. Nilai maksimum fungsi tangen
   b. Nilai minimum fungsi tangen
2. Berdasarkan grafik di atas, tentukan dua nilai x yang memenuhi apabila:
   a. tan x = -1
   b. tan x = ½

Dari kegiatan di atas dapat disimpulkan bahwa nilai fungsi tangen antara –∞ sampai +∞. Apabila nilai tangen sebuah sudut adalah tertentu, tetapi kebalikannya tidak demikian, yaitu terdapat berbagai besar sudut yang nilai tangennya sama. Misalnya, jika tan x = -1, beberapa nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{1}{4}\pi$, $2\frac{1}{4}\pi$, $3\frac{1}{4}\pi$, dan seterusnya. Secara umum dapat dituliskan,

Jika y = tan x, maka x = arc tan y (dibaca ‘arcus tangen dari y’), atau

x = tan –1 y (dibaca ‘tangen invers dari y’)

Pada kalkulator ilmiah, nilai arcus tangen atau tangen invers dari sebuah sudut diberikan untuk –$\frac{1}{2}\pi$ sampai $\frac{1}{2}\pi$.

Contoh:

1. Tentukan nilai x, apabila tan x = 0.475
2. Tentukan nilai t apabila tan t = -0.866. Berikan jawabnya dalam satuan derajat.

Penyelesaian:

1. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode radian) diperoleh $\tan^{-1}$ 0.475 = 0.44345
   Tangen sebuah sudut bernilai positif pada kuadran I dan III, jadi nilai x yang lain adalah π + 0.44345 = 3.585041. Karena fungsi tangen berperiode π, maka x =0.49496 + n(π), untuk n bilangan bulat.
2. Dengan menggunakan kalkulator (dalam mode derajat) diperoleh $\tan^{-1}$ –0.866 = -40.89256^0 (kuadran IV)
   Tangen sebuah sudut bernilai negatif pada kuadran II dan IV. Nilai pada kuadran II dicari dengan dengan menambah 180^0. Karena fungsi tangen berperiode 180^0, maka x =-40.89256^0 + n(180^0), untuk n bilangan bulat.

Kita juga dapat menentukan nilai fungsi yang melibatkan bentuk trigonometri.

Contoh:

Misalkan f(x) = x + sin (x + ¼π). Tentukan:

a. f((¾π)
b. f(-3)

Penyelesaian:

a. f((¾π) = ¾π + sin (¾π + ¼π)
   = ¾π + sin π = ¾π + 0 = ¾π
b. Karena variabel x merupakan bilangan real, maka satuan sudut yang digunakan adalah radian. Dengan bantuan kalkulator diperoleh
   f((-3) = -3 + sin (-3 + ¼π)
   = -3 + sin (-2.214602) = -3 + (-0.03864) = -3.03864

Latihan 1

1. Untuk f(x) = $x^2 – 4$, hitunglah:

a. f(1)	d. f(-2)
b. f(0)	e. f(k)
c. f(-6)	f. f(2t + 1)

2. Gambarkan grafik fungsi trigonometri berikut.
   a. f(x) = sin x, dengan x dalam derajat
   b. f(x) = cos x, dengan x dalam derajat
   c. f(x) = tan x, dengan x dalam derajat
3. Tentukan nilai x pada persamaan berikut.
   a. sin x = -0.787
   b. cos (x + π) = 0.655
   c. tan (-x) = 3.22
4. Sebuah fungsi didefinisikan sebagai h(t) = t + tan t
   Tentukan: (a) h(0)
   a. h(0)
   b. h(1)
   c. h(½π)
5. Gambarkan grafik fungsi f(x) = sin x dan g(x) = cos x pada satu bidang koordinat. Tentukan titik potong kedua grafik tersebut.
6. Gambarkan grafik fungsi berikut.
   a. Y = 2 sin ½x, untuk $–360^0 \le x \le 360^0$
   b. Y = 3 cos ½x, untuk $0 \le x \le 2\pi$
7. Apabila cos A = 3/5, maka tentukan $\dfrac{\cos A \tan A}{\csc A}$
8. Apabila tan A = $\dfrac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$, maka tentukan sin A dan cos A
9. Tentukan tinggi jajar genjang pada gambar berikut.

10. Pada segitiga ABC, AC = 34 dan sudut C = 53^0 15'.
    a. Gambarkan segitiga ABC
    b. Tentukan garis tinggi AD
11. Sebuah lingkaran berjari-jari 1 satuan. Dari lingkaran tersebut dibentuk segi-n beraturan sehingga titik-titik sudutnya terletak pada sisi lingkaran.
    Tunjukkan bahwa panjang sisi segi-n beraturan adalah $2\sin\left(\dfrac{180^0}{n}\right)$
12. Sebuah roket diluncurkan dan membentuk sudut x terhadap tanah. Persamaan sudutnya adalah y = -½ tan x + 3/2. Gambarkan grafiknya untuk $0 \le x \le 2\pi$.

UNIT 4 IDENTITAS TRIGONOMETRI

Bentuk identitas atau kesamaan trigonometri yang paling sederhana, telah dibahas sebelumnya. Misalnya:

$\sin(\pi - \phi) = \sin\phi$ $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$ $\tan(\pi - \phi) = -\tan\phi$ .... (1)	$\sin(\pi + \phi) = -\sin\phi$ $\cos(\pi + \phi) = -\cos\phi$ $\tan(\pi + \phi) = \tan\phi$ .... (2)
$\sin(-\phi) = -\sin\phi$ $\cos(-\phi) = \cos\phi$ $\tan(-\phi) = -\tan\phi$ .... (3)	$\sin(2\pi + \phi) = \sin\phi$ $\cos(2\pi + \phi) = \cos\phi$ $\tan(2\pi + \phi) = \tan\phi$ .... (4)

Bentuk identitas trigonometri lainnya adalah

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ .... (5)

Apabila persamaan (5) dibagi $\sin^2\phi$, diperoleh

$$\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = \frac{1}{\sin^2\phi} \rightarrow 1 + \cot^2\phi = \csc^2\phi \quad \text{........................ (6)}$$

Apabila persamaan (5) dibagi $\cos^2\phi$, diperoleh

$$\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi} \rightarrow \tan^2\phi + 1 = \sec^2\phi \quad \text{........................ (7)}$$

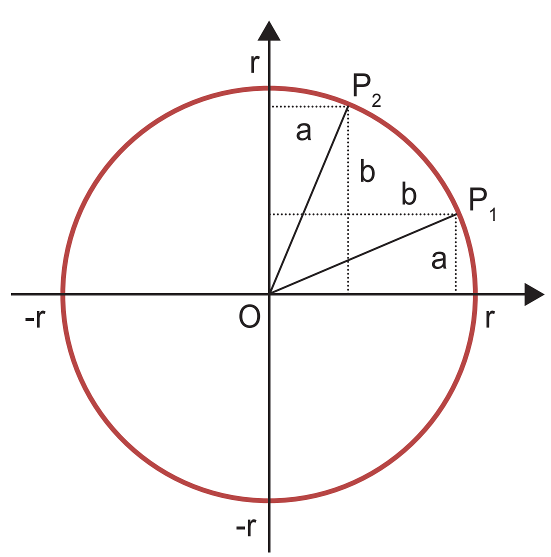
Bagaimana hubungan nilai sinus dan cosinus? Perhatikan gambar berikut.

Titik P_1 dicerminkan terhadap garis y = x sehingga diperoleh titik P_2. Sudut yang dibentuk oleh garis OP_2 terhadap sumbu x adalah $\frac{1}{2}\pi - \phi$. Perhatikan bahwa

$\sin\phi = a/r$ dan $\cos(\frac{1}{2}\pi - \phi) = a/r$

dan

$\cos\phi = b/r$ dan $\sin(\frac{1}{2}\pi - \phi) = b/r$



Dapat disimpulkan bahwa

$\cos(\frac{1}{2}\pi - \phi) = \sin\phi$

$\sin(\frac{1}{2}\pi - \phi) = \cos\phi$ .... (7)

Contoh 1:

Apabila $\cos\phi = \frac{1}{4}$, maka:

a. Tunjukkan bahwa $\sin\phi = \frac{1}{4}\sqrt{15}$
b. Carilah $\tan\phi$

Penyelesaian:

a. Dari bentuk kesamaan $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, diperoleh

$\sin^2\phi + (\frac{1}{4})^2 = 1$

$\sin^2\phi = 1 - (\frac{1}{4})^2 = 15/16$

$\sin\phi = \sqrt{15/16} = \frac{1}{4}\sqrt{15}$

b. $\tan\phi = \dfrac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \dfrac{\frac{1}{4}\sqrt{15}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$

Latihan 1

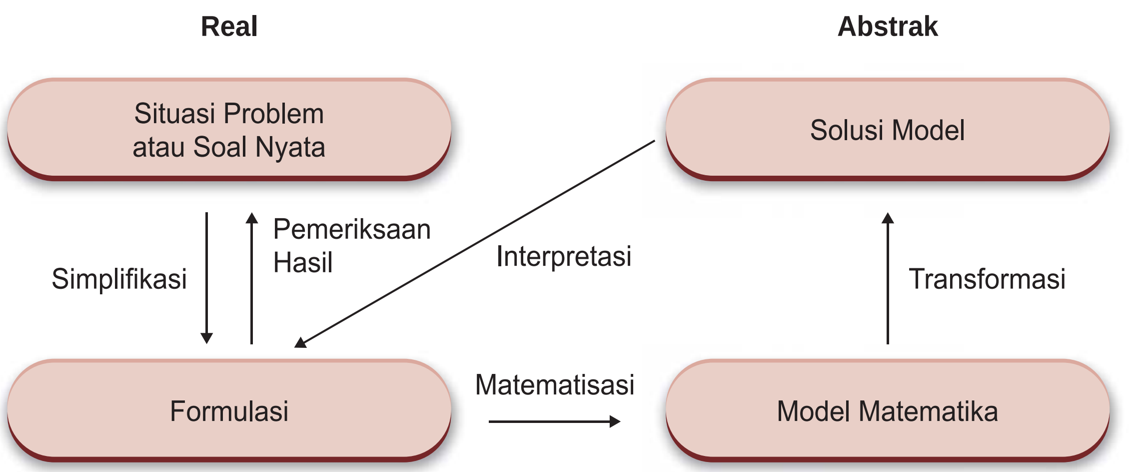
1. Tunjukkan kesamaan berikut
   a. $\cos(4\pi + x) = \cos x$
   b. $\sin(3\pi + x) = -\sin x$
   c. $\cos(-\pi - x) = -\cos x$
   d. $\sin(-\pi - x) = \sin x$
2. Apabila $\sin\phi = t$, tunjukkan bahwa
   a. $\cos^2\phi = (1 + t)(1 - t)$
   b. $\tan^2\phi = \dfrac{1}{1 - t^2} - 1$
2. Apabila $\sin\phi \cos\phi = \frac{1}{2}$, tunjukkan bahwa
   a. $\sin^2\phi - \sin^4\phi = \frac{1}{4}$
   b. apabila $t = \sin^2\phi$, tuliskan persamaan untuk t
   c. carilah nilai $\sin\phi$
4. Selesaikan persamaan berikut
   a. $6\cos^2\phi + \cos\phi - 1 = 0$
   b. $-5\sin^2\phi + \sin\phi + 1 = 0$
   c. $\tan\phi - \tan^2\phi + 0.5 = 1$

UNIT 5

MERANCANG MODEL MATEMATIKA UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH TRIGONOMETRI

Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari, teknik ataupun keilmuan yang dapat diselesaikan dengan bantuan konsep matematika. Pentingnya fungsi matematika, terutama sebagai sarana (*tools*) untuk memecahkan masalah baik pada matematika maupun dalam bidang lainnya, sebagai cara mengkomunikasikan gagasan secara praktis, sistematis, dan efisien. Sebagai ilmu, matematika juga sangat bermanfaat untuk melatih penalaran (meningkatkan kemampuan berpikir kritis dan konsisten) melalui pemilihan materi-materi yang tercakup dalam matematika. Beberapa ketrampilan yang perlu dimiliki untuk meningkatkan kemampuan memecahkan masalah adalah:

- **Memahami Soal:**
  Dari soal atau masalah, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Menyatakan soal ke dalam bahasa Anda sendiri
  (2) Membuat diagram dari soal tersebut
  (3) Menentukan apa fakta atau informasi yang diberikan
  (4) Menentukan apa yang ditanyakan, diminta untuk dicari, atau dibuktikan
- **Memilih Pendekatan atau Strategi Pemecahan:**
  Setelah memahami soal, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Memilih dan menggunakan pengetahuan aljabar yang diketahui
  (2) Menentukan konsep yang relevan
  (3) Menentukan atau memilih variabel yang terlibat
  (4) Merumuskan model matematika atau kalimat matematika dari masalah
- **Menyelesaikan Model:**
  Setelah memilih strategi penyelesaian, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Menentukan jenis model matematika, misalnya apakah model matematika berbentuk persamaan linear atau nonlinear, dan sebagainya
  (2) Melakukan operasi hitung atau operasi aljabar secara benar, untuk mendapatkan solusi dari masalah.
- **Menafsirkan Solusi:**
  Setelah solusi atau penyelesaian dari model matematika, kalian harus bisa menentukan beberapa hal berikut
  (1) Memeriksa kelayakan atau kebenaran jawaban atau masuk akalnya jawaban, atau memberikan penyelesaian terhadap masalah semula
  (2) Solusi atau penyelesaian model matematika diterjemahkan ke dalam solusi atau penyelesaian dari masalah semula

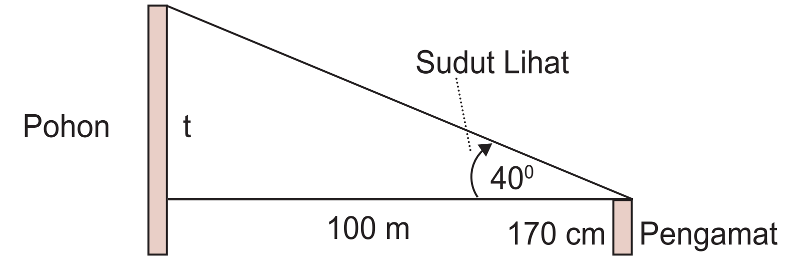


Apabila telah mahir menyelesaikan masalah, mungkin beberapa tahap langkah di atas dapat dilewati. Barangkali cukup membaca masalah, kemudian langsung membentuk model matematika, menyelesaikan dan langsung mendapatkan penyelesaian masalahnya. Terdapat banyak masalah yang berkaitan dengan trigonometri. Kita akan memulai contoh penyelesaian masalah dengan langkah bertahap seperti berikut.

Contoh 1:
Sebuah pohon berjarak 100 meter dari seorang pengamat yang tinggi badannya 170 cm. Apabila pucuk pohon tersebut dilihat pengamat dengan sudut angkat (elevasi) sebesar 40^0, tentukan tinggi pohon tersebut.

Penyelesaian:
Apabila kita ikuti tahapan pemecahan masalah di atas, maka diperoleh sebagai berikut

- **Memahami soal**
  (1) Diagram dari soal



  (2) Dari soal diketahui: jarak mendatar pengamat ke pohon 100 m, tinggi pengamat 170 cm = 1.7 m, dan sudut lihat 40^0. Perhatikan bahwa satuan-satuan yang sejenis dinyatakan dalam satuan pengukuran yang sama agar mudah, yaitu tinggi pohon dan pengamat dinyatakan dalam satuan yang sama.
  (3) Yang dicari dari soal di atas: tinggi pohon

- **Memilih Pendekatan atau Strategi Pemecahan:**
  (1) Konsep yang relevan dari soal di atas adalah perbandingan trigonometri
  (2) Kita bisa menetapkan: variabel t untuk tinggi pohon setelah dikurangi tinggi pengamat
  (3) Merumuskan model matematika. Dari diagram di atas diperoleh

  $$\tan 40^0 = \frac{\textit{tinggi pohon dikurangi tinggi pengamat}}{\textit{jarak mendatar pengamat ke pohon}}$$

  $$\tan 40^0 = \frac{t}{100}$$, t dalam meter

  Perhatikan bahwa apabila satuan t diubah ke satuan lain misalnya cm, maka model matematikanya berubah.
- **Menyelesaikan Model:**
  (1) Dengan melakukan operasi hitung atau operasi aljabar, diperoleh

  $$\tan 40^0 = \frac{t}{100}$$

  $t = 100 \tan 40^0$
  (2) Dengan menggunakan bantuan kalkulator ilmiah diperoleh
  $t = 100 \tan 40^0 = 100\ (0.8391) = 83.91$
- **Menafsirkan Solusi:**
  (1) Tinggi pohon = tinggi pengamat + nilai t
  = 1.8 m + 83.91 m = 85.71 m
  Jadi, kira-kira tinggi pohon 85.71 m. Perhatikan bahwa tinggi pohon ini adalah jawaban pendekatan karena sudut lihatnya dari mata sehingga jarak dari mata ke atas kepala diabaikan.

Contoh 2:
Persamaan gelombang suara diberikan oleh y = Asin (2π f t, di mana A amplitudo, t waktu dalam detik dan f frekuensi atau banyak periode dalam satu detik.

a. Tentukan amplitudo, frekuensi dan periode dari persamaan gelombang yang diberikan oleh y =0.02sin (500π t)
b. Carilah persamaan gelombang dengan frekuensi 4138.4 dan amplitudo 0.001

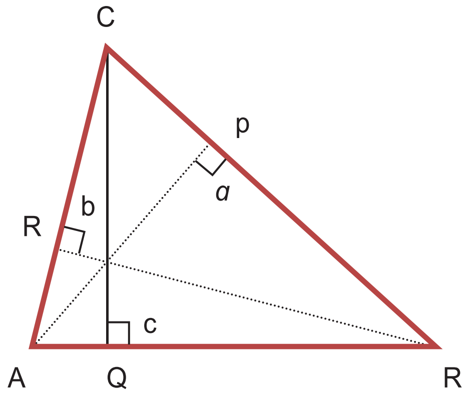
Penyelesaian:
Apabila kita sudah mahir menyelesaikan masalah. Maka kita dapat menyelesaikan secara ringkas sebagai berikut.
Masalah di atas merupakan masalah yang tidak harus dibuatkan diagramnya.

a. Dari persamaan berbentuk y =0.02sin (500π t), diperoleh A = 0.02, 2f = 500. Jadi, Amplitudonya 0.02 dan frekuensinya 250. Perhatikan bahwa frekuensi adalah banyak periode dalam satu detik. Dengan demikian, frekuensi 250 berarti terdapat 250 periode dalam satu detik atau periode dari gelombang tersebut 1/250 = 0.004
b. Dengan menggunakan rumus y = Asin (2π f t) di mana A = 0.001 dan f = 4138.4, maka diperoleh persamaan gelombangnya
   y = Asin (2π f t)
   = 0.001 sin (2π (4138.4) t)
   =0.001 sin (8276.8π t)

Latihan 1

1. Riki bermain layang-layang. Dia mengulur benang sepanjang 65 meter. Apabila sudut elevasi benangnya terukur 70^0, maka:
   a. Gambarkan sketsa posisi layang-layang, benang dan Riki
   b. Tentukan tinggi layang-layang tersebut.
2. Dari suatu titik pada tanah berjarak 10 meter dari kaki tiang bendera. Apabila sudut elevasi ke puncak bendera 53^0, tentukan tinggi tiang bendera.
3. Seorang pilot pesawat melihat puncak gunung dari ketinggian 1200 m. Apabila sudut depresi (sudut lihat pilot terhadap arah mendatar) sebesar 28^0, maka:
   a. Gambarkan sketsa puncak gunung, posisi pesawat dan ketinggian dari tanah
   b. Tentukan jarak pesawat ke puncak gunung
4. Pilot pesawat terbang pada ketinggian 265 m dan melihat dua kapal laut dengan sudut depresi 35^0 20' dan 25^0 30'.
   a. Gambarkan sketsa posisi pesawat dan dua kapal laut
   b. Berapa jarak kedua kapal laut tersebut?
5. Pos hutan pegunungan terletak pada ketinggian 1.3 mil dari permukaan laut. Sebuah titik api kebakaran terlihat pada ketinggian 0.2 mil. Apabila sudut depresi titik api terhadap pos hutan adalah $18^0$15', maka:
   a. Gambarkan sketsa dari masalah di atas
   b. Berapa jarak titik api dari pos hutan?
6. Sebuah helikopter penyelamat terbang pada ketinggian 75 meter. Tepat di bawahnya ditemukan dua orang berpelampung. Setelah menyelamatkan orang tersebut, heli naik ke posisi semula dan terlihat seorang berpelampung dengan sudut depresi 26^0 25'. Gambarkan situasi masalah tersebut. Tentukan jarak antar pelampung tersebut.
7. Pada sebuah kubus dibentuk segitiga siku-siku ABC, di mana AB merupakan salah satu rusuk dari kubus, BC diagonal bidang kubus dan AC diagonal ruang kubus.
   a. Gambarkan kubus dan segitiga ABC tersebut
   b. Tentukan besar sudut ACB dan BAC

UNIT 6 ATURAN SINUS DAN COSINUS



Untuk menurunkan rumus aturan sinus perhatikan penjelasan berikut:

Segitiga ABC adalah segitiga sembarang, AP, BQ dan CR adalah garis tinggi segitiga ABC. Misal panjang sisi AB=c, BC = *a* dan AC = b. Dengan menggunakan perbandingan trigonometri, diperoleh:

$$\text{Sin A} = \frac{CR}{AC} = \frac{CR}{b} \rightarrow \text{CR= b Sin A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh:

$$\text{Sin B} = \frac{CR}{BC} = \frac{CR}{a} \rightarrow \text{CR= a Sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$\text{b Sin A = a Sin B} \rightarrow \frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sekarang perhatikan ∆ BAP:

$$\text{Sin B} = \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{c} \rightarrow \text{AP = c. Sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Demikian juga pada ∆ CAP:

$$\text{Sin C} = \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{b} \rightarrow \text{AP= b. Sin C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh persamaan:

$$\text{c. Sin B = b. Sin C} \rightarrow \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dari persamaan (3) dan (6) dapat disimpulkan dalam segitiga ABC sembarang berlaku rumus yang dikenal dikenal dengan aturan sinus:

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

Sisi a adalah sisi yang dihadapi oleh sudut A, demikian juga untuk sisi b dan c.

Contoh:

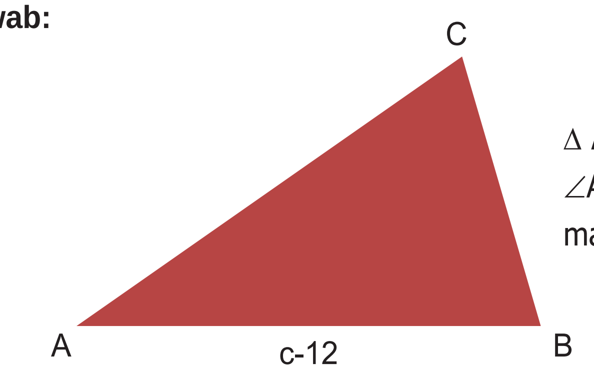
Diketahui sebuah segitiga sembarang ABC, dengan AB=c=12 cm, $\angle A = 50^0$, $\angle B = 80^0$, hitunglah:

a. Besar $\angle C$

b. Panjang AC dan BC

Jawab:

a.



∆ ABC sembarang dengan AB=c=12 cm.

$\angle A = 40^0$, $\angle B = 80^0$

maka $\angle C = 180^0 - 40^0 - 80^0$

$= 60^0$

b. Berdasarkan rumus: $\frac{a}{SinA} = \frac{c}{SinC}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{Sin40^0} = \frac{a}{Sin60^0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{0{,}643} = \frac{12}{0{,}866}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}866\ a = 12 \times 0{,}643$$

$$= 7.716$$

$$a = \frac{7.716}{0{,}866} = 8{,}91 \text{ cm}$$

jadi BC = a = 8,91 cm

Untuk menghitung panjang AC = b adalah:

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB}$$

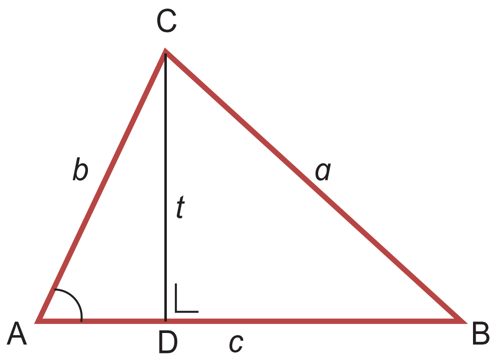
$$\Leftrightarrow \frac{8,91}{Sin40^0} = \frac{b}{Sin80^0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8,91}{0,643} = \frac{b}{0,98}$$

diperoleh b = AC = $\frac{8,77}{0,643}$ = 13,65 cm

Aturan Cosinus

Perhatikan segitiga ABC dengan garis tinggi CD berikut.
Segitiga ABC segitiga sembarang. AC = b ; BC = a ; AB = c ; CD = t



Perhatikan Δ BCD, akan dicari panjang a dengan dalil pytagoras diperoleh:

$a^2 = t^2 + BD^2$ .... (7)

Dari segitiga ACD, diperoleh:

$t = b \text{ Sin } A \Leftrightarrow t^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A$ .... (8)

$AD = b \text{ Cos } A$ .... (9)

Panjang BD = AB – AD , menurut persamaan (9) maka

BD = AB – bCosA

BD = c – bCosA .... (10)

Dari persamaan (7), (8) dan (10) diperoleh hubungan berikut:

$$a^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A + (c - b\text{Cos}A)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A + c^2 - 2bc \text{ Cos}A + b^2 \text{ Cos}^2 A$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \text{ Sin}^2 A + b^2 \text{ Cos}^2 A + c^2 - 2bc \text{ Cos}A$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \underbrace{(\text{Sin}^2 A + \text{Cos}^2 A)}_{=1} + c^2 - 2bc \text{ Cos}A$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos}A$... (11)

Pada rumus (11), teramati sisi pada ruas kiri adalah sisi a dan sudut pada ruas kanan adalah sudut A. dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan

b2 = a2 + c2 – 2ac CosB .... (12)

$c2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos}C$... (13)

Dari persamaan (11), (12), dan (13), secara umum diperoleh rumus yang dikenal dengan aturan cosinus untuk suatu segitiga ABC sembarang:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos}A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos}B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos}C$$

Contoh:

Tentukan besar sudut A jika dari segitiga ABC diketahui a=5 cm ; b =8 cm ; c = 12

Jawab:

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos}A$

$\Leftrightarrow 5^2 = 8^2 + 12^2 - 2.8.12. \text{ Cos}A$

$\Leftrightarrow 25 = 64 + 144 - 192 \text{ Cos } A$

$\Leftrightarrow 192 \text{ Cos } A = 64 + 144 - 25$

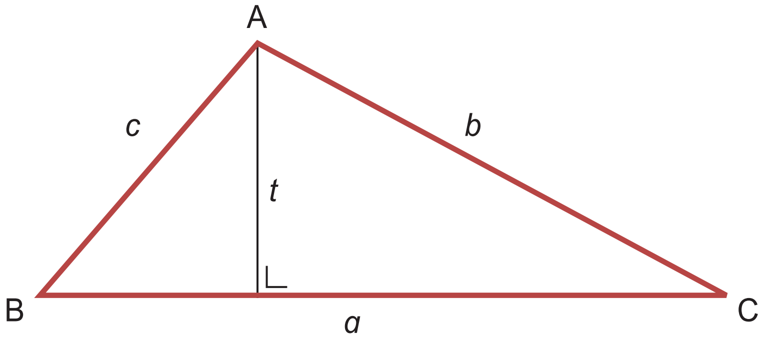
$\Leftrightarrow 192 \text{ Cos } A = 183$

$\Leftrightarrow \text{Cos } A = \frac{183}{192} = 0,953$

$A = 17,6^0$

Penggunaan Aturan Sinus

Selama ini luas segitiga dihitung dengan rumus luas alas x tinggi dibagi dua. Sekarang perhatikan segitiga ABC berikut.



Luas segitiga ABC adalah :

L = ½ x alas x tinggi

= ½ x a x t .... (A)

Berdasarkan perbandingan trigonometri, $\frac{t}{AB} = SinB$ atau t = AB Sin B , karena AB = c , maka

t = c Sin B .... (B)

Dari persamaan (A) dan (B) , maka diperoleh rumus luas segitiga:

L = ½ ac Sin B .... (C)

Dengan cara yang sama, dapat diturunkan rumus lain

L = ½ ab Sin C .... (D)

L = ½ bc Sin A .... (E)

Contoh:

Sebuah segitiga ABC diketahui sisi a = 12 cm , b = 8 cm dan ∠C=35⁰ tentukan luas segitiga tersebut.

Jawab:

∠C=35⁰ maka sin 35⁰ = 0,57 (menggunakan kalkulator)

maka luas segitiga ABC : L = ab SinC

= 12 x 8 x 0,57

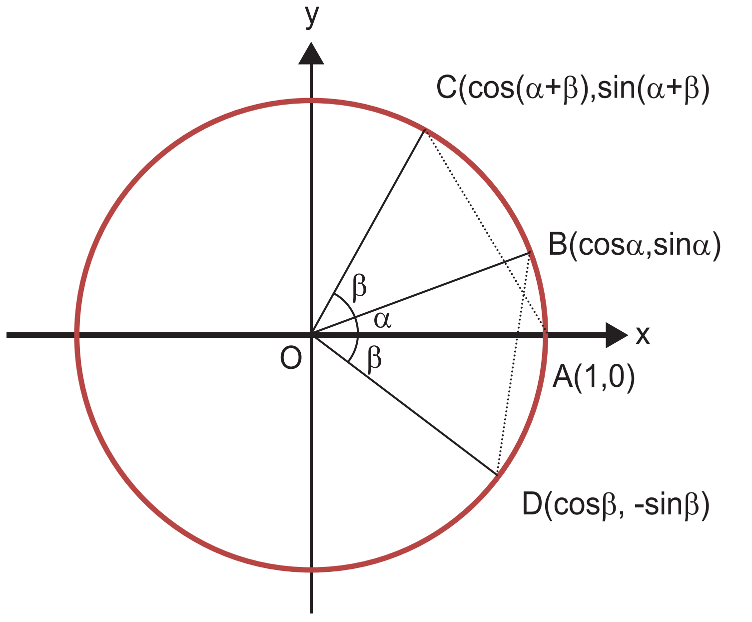
= 55,06 cm²

Latihan 1

1. Pada segitiga PQR, diketahui ∠P = 42⁰ , ∠Q = 70⁰, dan PR = 10 cm
   a. Hitunglah besar sudut R
   b. Hitung panjang PQ dan QR
2. Gambarkan segitiga KLM. ∠K = 40⁰ , panjang KL = 20 cm dan ∠L= 55⁰.
   a. Hitunglah besar sudut M
   b. Hitung panjang sisi KM dan LM
3. Pada segitiga ABC diketahui ∠A = 40⁰, AC = 15 cm, AB = 18 cm.
   a. Hitung Luas segitiga ABC
   b. Hitung tinggi segitiga ABC
   c. Hitung panjang sisi BC
4. Pada segitiga PQR diketahui PQ = 6 cm, QR = 10 cm dan ∠ P = 37⁰. hitung panjang sisi PR.

UNIT 7 COSINUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

Sampai saat ini, kita telah membahas beberapa rumus dasar trigonometri, pada bagian berikut kita membahas penurunan dan penerapan rumus trigonometri dari jumlah dan selisih dua sudut. Perhatikan gambar dibawah ini:



Pada gambar di atas, titik O (0,0) adalah pusat dari lingkaran yang berjari-jari 1 satuan. Koordinat titik A(1,0), besar sudut AOB = α, besar sudut BOC = β. Maka sudut AOC = α+β .

Panjang OC = OB = OA = panjang jari-jari = 1. Bagaimana menentukan koordinat titik B?

$\sin \alpha = \dfrac{ordinat\ B}{OB}$ $\cos \alpha = \dfrac{absis\ B}{OB}$

ordinat B $= OB \times \sin \alpha = (1)\sin \alpha = \sin \alpha$

absis B $= OB \times \cos \alpha = (1)\cos \alpha = \cos \alpha$

Jadi, koordinat titik B adalah (absis B, ordinat B) = (cos α, sin α). Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa

- Koordinat titik C dapat dinyatakan sebagai (cos(α+β),sin(α+β)).
- Kordinat titik D dapat dinyatakan sebagai (cosβ,-sinβ)

Dari segitiga AOC dan BOD

$$\left.\begin{array}{l} OD = OA \text{ (jari-jari)} \\ \angle AOC = \angle BOD \\ OC = OB \text{ (jari-jari)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{maka segitiga AOC kongruen segitiga BOD} \\ \text{akibatnya : } AC = BD \text{ .... (i)} \end{array}$$

Jarak dua titik AC adalah:

$AC^2 = \{ \cos(\alpha+\beta) - 1\}^2 + \{ \sin(\alpha+\beta) - 0\}^2$

$\Leftrightarrow$ $AC^2 = \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow$ $AC^2 = \underbrace{\cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)}_{=1} - 2\cos(\alpha+\beta) + 1$

maka $AC^2 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$ .... (ii)

Jarak dua titik BD adalah :

$BD^2 = \{ \cos\beta - \cos\alpha \}^2 + \{- \sin\beta - \sin\alpha\}^2$

$\Leftrightarrow$ BD2 = cos2β – 2 cosβ . cosα + cos2α + sin2β + 2 sinβ.sinα + sin2 α

$\Leftrightarrow$ BD2 = cos2β + sin2β + cos2α + sin2 α – 2 cosβ . cosα + 2 sinβ.sinα

$\Leftrightarrow$ BD2 = 2 – 2 cosβ . cosα + 2 sinβ.sinα .... (iii)

Dari persamaan (i), (ii), dan (iii), maka diperoleh persamaan:

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\beta \cdot \cos\alpha + 2\sin\beta.\sin\alpha$

$\Leftrightarrow$ $-2\cos(\alpha+\beta) = -2\cos\beta \cdot \cos\alpha + 2\sin\beta.\sin\alpha$

$\Leftrightarrow$ $2\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta - 2\sin\alpha.\sin\beta$

$\Leftrightarrow$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

Sehingga diperoleh rumus cosinus dari jumlah dua sudut:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$ .... (iv)

Contoh:

Hitung cosinus jumlah sudut $a^0 + b^0$?

Jawab:

$\cos(a^0 + b^0) = \cos a^0 \cdot \cos b^0 - \sin a^0.\sin b^0$

Sekarang jika sudut β diganti dengan $-\beta$, maka rumus (iv) menjadi bentuk berikut:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

$\Leftrightarrow$ $\cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha .\cos(-\beta) - \sin\alpha.\sin(-\beta)$

Karena $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, maka:

$\Leftrightarrow$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha .\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

Diperoleh rumus cosinus dari selisih dua sudut:

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$ .... (v)

Contoh soal:

1. Uraikan bentuk dibawah ini:
   a. $\cos(2a + 3b)$
   b. $\cos(\frac{a}{2} + \frac{b}{3})$
   c. $\cos(3c - 2a)$
   d. $\cos(2p - \frac{q}{2})$

   Jawab:

   a. $\cos(2a + 3b) = \cos 2a \cdot \cos 3b - \sin 2a.\sin 3b$

   b. $\cos(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}) = \cos\frac{a}{2}. \cos\frac{b}{3} - \sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{3}$

   c. $\cos(3c^0 - 2a^0) = \cos 3c^0 \cdot \cos 2a^0 + \sin 3c^0.\sin 2a^0$

   d. $\cos(2p - \frac{q}{2}) = \cos 2p \cdot \cos\frac{q}{2} - \sin 2p.\sin\frac{q}{2}$

2. Dengan menggunakan rumus cosinus jumlah dan selisih dua sudut, tentukan:
   a. $\cos(75^0)$
   b. $\cos(15^0)$

   Jawab:

   a. $\cos(75^0) = \cos(30^0 + 45^0)$
      $= \cos 30^0.\cos 45^0 - \sin 30^0.\sin 45^0$
      $= \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$
      $= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

   b. $\cos(15^0) = \cos(45^0 - 30^0)$
      $= \cos 45^0.\cos 30^0 + \sin 45^0.\sin 30^0$
      $= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}$
      $= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

3. Tentukan bentuk sederhana dari berikut:
   a. cos5a.cos3b – sin 5a. sin5b
   b. cos(2a+b).cos(-a+b) + sin(2a+b).sin(-a+b)

   Jawab:

   a. cos5a.cos3b – sin 5a. sin5b = cos(5a+3b)

b. $\cos(2a+b).\cos(-a+b) + \sin(2a+b).\sin(-a+b) = \cos\{(2a+b) - (-a+b)\}$

$= \cos\{2a+b+a - b\}$

$= \cos(3a)$

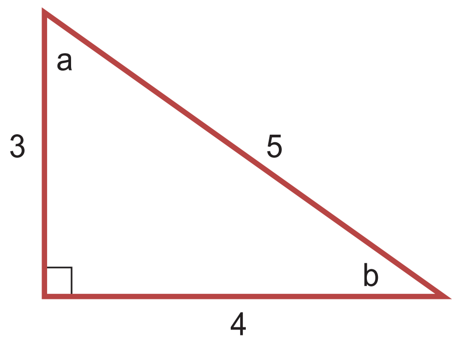
4. Jika $\cos a = \frac{3}{5}$; $\cos b = \frac{4}{5}$ tentukan nilai dari :

a. $\cos(a + b)$

b. $\cos(a - b)$

c. $\cos(b - a)$

Jawab: Dari gambar dibawah ini diperoleh:



$\cos a = \frac{3}{5}$, maka $\sin a = \frac{4}{5}$

$\cos b = \frac{4}{5}$, maka $\sin b = \frac{3}{5}$

a. $\cos(a + b) = \cos a.\ \cos b - \sin a.\ \sin b$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{12}{25} - \frac{12}{25}$

$= 0$ karena besar sudut $(a+b) = 90^0$ sehingga $\cos 90^0 = 0$

b. $\cos(a - b) = \cos a.\ \cos b + \sin a.\ \sin b$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$

$= \frac{24}{25}$

c. $\cos(b - a) = \cos b.\ \cos a + \sin b.\ \sin a$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$

$= \frac{24}{25}$

UNIT 8 SINUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

Tentu kita masih ingat identitas: $\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos \alpha$ dan $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Kita akan menggunakan sifat ini untuk menurunkan rumus sinus jumlah dua sudut sebagai berikut:

$\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos \alpha$, maka $\sin(\frac{1}{2}\pi - (\alpha+\beta)) = \cos(\alpha+\beta)$ .... (vi)

$\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$, maka $\cos(\frac{1}{2}\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)$ .... (vii)

Dari persamaan (vii) dapat diuraikan sebagai berikut:

$\cos(\frac{1}{2}\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) - \beta)) = \sin(\alpha+\beta)$

Dengan menguraikan ruas kiri, diperoleh:

$\Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha).\ \cos\beta + \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha).\ \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow \sin\alpha.\ \cos\beta + \cos\alpha.\ \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$

Jadi, diperoleh rumus sinus dari jumlah dua sudut:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\ \cos\beta + \cos\alpha.\ \sin\beta$ .... (viii)

Jika sudut β diganti menjadi $-\beta$, dari persamaan (viii) diperoleh:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\ \cos\beta + \cos\alpha.\ \sin\beta$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\ \cos(-\beta) + \cos\alpha.\ \sin(-\beta)$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\ \cos\beta + \cos\alpha.\ (-\sin\beta)$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\ \cos\beta - \cos\alpha.\ \sin\beta$

Sehingga diperoleh rumus sinus dari selisih dua sudut:

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\ \cos\beta - \cos\alpha.\ \sin\beta$ .... (ix)

Contoh soal:

1. Hitunglah besar sudut dari :
   a. $\sin 75^0$
   b. $\sin 15^0$

Jawab:

a. $\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0)$

$= \sin 45^0.\ \cos 30^0 + \cos 45^0.\ \sin 30^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{3})$

b. $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0)$

$= \sin 45^0.\ \cos 30^0 - \cos 45^0.\ \sin 30^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

2. Jika sin a = $\frac{3}{5}$ dan sin b = $\frac{3}{5}$ hitunglah:
   a. sin (a + b)
   b. sin (a – b)

   Jawab:
   Dari sin a $\frac{3}{5}$ =, maka diperoleh cos a = $\frac{4}{5}$

   sin b = $\frac{3}{5}$, maka diperoleh cos b = $\frac{4}{5}$

   a. sin (a+b) = sina. cos b + cosa. sinb

   $$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$$
   $$= \frac{24}{25}$$

   b. sin (a–b) = sina. cos b – cosa. sinb

   $$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} - \frac{12}{25}$$

   = 0 ini berarti besar sudut a sama dengan besar sudut b

3. Tentukan uraian dari :
   a. sin (2a + 3b)
   b. sin (3a – p)
   c. sin $(\frac{a}{2} + \frac{p}{2})$

   Jawab:
   a. sin (2a + 3b) = sin2a. cos 3b + cos2a. sin3b
   b. sin (3a – p) = sin3a. cos p – cos3a. sinp
   c. sin $(\frac{a}{2} + \frac{p}{2})$ = sin$\frac{a}{2}$ .cos$\frac{p}{2}$ + cos$\frac{a}{2}$ .sin$\frac{p}{2}$

4. Tentukan bentuk sederhana dari :
   a. sin(2a – 2b).cos(2a – 2b) + cos (2a – 2b).cos (2a – 2b)

   b. sin $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$.cos $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$ – cos $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$.sin $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$

Jawab:
a. sin(2a – 2b).cos(2a – 2b) + cos (2a – 2b).cos (2a – 2b)
= sin {2a – 2b + 2a – 2b}
= sin (4a – 4b)

b. sin $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$.cos $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$ – cos $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$.sin $(\frac{\alpha}{2} + \beta)$

= sin $\{(\frac{\alpha}{2} + \beta) - (\frac{\alpha}{2} + \beta)\}$
= sin 0
= 0
atau dapat dikerjakan secara langsung hasilnya nol.

Selain rumus cosinus dan sinus dari jumlah dan selisih dua sudut, dapat pula diturunkan rumus trigonometri lainnya, sebagai berikut.

Rumus Tangen dari Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Telah diketahui bahwa tangen didefinisikan sebagai tan $\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, maka

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{\sin \alpha.\cos \beta + \cos \alpha.\sin \beta}{\cos \alpha.\cos \beta + \sin \alpha.\sin \beta}$$

Apabila ruas kanan, bagian pembilang dan bagian penyebut dikalikan $\frac{1}{\cos \alpha.\cos \beta}$, diperoleh:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha.\cos \beta + \cos \alpha.\sin \beta}{\cos \alpha.\cos \beta - \sin \alpha.\sin \beta} \times \frac{\frac{1}{\cos \alpha.\cos \beta}}{\frac{1}{\cos \alpha.\cos \beta}}$$
$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha.\tan \beta}$$

Jadi rumus jumlah dua sudut dari tangens adalah:

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha.\tan \beta} \quad \text{.. (A)}$$

Demikian juga, dapat ditunjukkan

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha.\tan(-\beta)}$$
$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha.\tan \beta} \quad \text{.................................... (B)}$$

Contoh soal:

1. Hitunglah :

   a. $\tan 75^0$ b. $\tan 15^0$

   Jawab:

   1. a. $\tan 75^0 = \tan (30^0 + 45^0)$

$$= \frac{\tan 30^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 30^0 . \tan 45^0}$$

$$= \frac{1/3\sqrt{3} + 1}{1 - 1/3\sqrt{3}.1} = \frac{(1/3\sqrt{3} + 1)}{(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})} \times \frac{(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})}{(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1)^2}{(1 - \frac{3}{9})} = (2 + \sqrt{3})$$

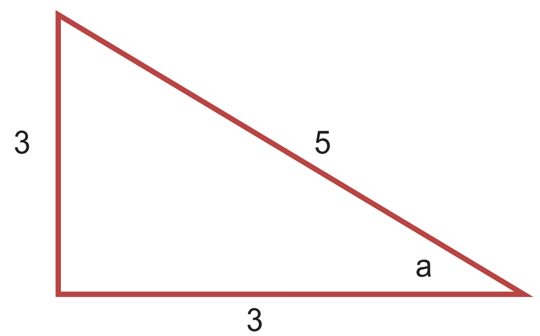
   b. $\tan 15^0 = \tan (45^0 - 30^0)$

$$= \frac{\tan 30^0 - \tan 45^0}{1 + \tan 30^0 . \tan 45^0}$$

$$= \frac{(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})}{(1 + 1.\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{(1 - \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3})}{(1 - \frac{1}{3})}$$

$$= (1 - \sqrt{3})$$

2. Apabila $\sin a = \frac{3}{5}$, dan $\sin b = \frac{3}{5}$ untuk mencari tan a dan tan b, perhatikan berikut ini:



$\sin a = \frac{3}{5}$, maka $\tan a = \frac{3}{4}$

Jika $\sin b = \frac{3}{5}$, maka $\cos b = \frac{4}{5}$; $\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{3}{4}$

a. $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4} . \frac{3}{4}} = \frac{24}{7}$$

b. $\tan (a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a . \tan b}$

$$= \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} . \frac{3}{4}} = \frac{24}{7} = 0$$

Coba sekarang Anda turunkan rumus cotangen dari jumlah dan selisih sudut.

Latihan 1

1. Jabarkan bentuk berikut ini:

   a. $\cos (2a + d)$ b. $\cos (3a - 2d)$ c. $\sin (x^0 + y^0)$

   d. $\sin (\frac{a - b}{2})$ e. $\tan (p^0 + 2q^0)$ f. $\tan (\frac{s}{3} - \frac{t}{2})$

2. Jika $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, hitunglah:

   a. $\cos (\alpha + \beta)$ b. $\cos (\alpha - \beta)$ c. $\sin (\alpha + \beta)$

   d. $\sin (\alpha - \beta)$ e. $\tan(\alpha + \beta)$ f. $\tan (\alpha - \beta)$

3. Sederhanakan bentuk berikut:

   a. $\cos (2a\text{-}c).\cos (a\text{-}2c) - \sin (2a\text{-}c).\cos(a\text{-}2c)$

   b. $\sin (2x\text{-}y).\cos(x\text{-}2y) - \cos (2x\text{-}y).\sin(x\text{-}2y)$

4. Hitunglah hasilnya:

   a. $\sin 105^0$

   b. $\cos 105^0$

   c. $\tan 105^0$

5. Hitung pula :

   a. $\sin 120^0$

   b. $\cos 150^0$

   c. $\tan 135^0$

6. Buktikan :
   a. $\sin (90^0 - \alpha) = \sin (90^0 + \alpha)$
   b. $\cos (90^0 - \alpha) = -\cos (90^0 + \alpha)$
7. Tunjukkan :
   a. jika $\sin a = \cos b$, maka $\sin (a+b) = 1$
   b. jika $\tan a = \tan b$, maka $\tan (a - b) = 0$

Rumus Trigonometri dari Sudut Ganda atau Sudut Rangkap

Kita belajar sinus dari jumlah dua sudut : $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$. Sekarang jika $\alpha=\beta$, maka akan menjadi:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha &= \sin\alpha . \cos\alpha + \cos\alpha . \sin\alpha .\\ &= 2 \sin\alpha . \cos\alpha\end{aligned}$$

Diperoleh rumus sudut rangkap sinus:

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha . \cos\alpha$

Untuk cosinus dari jumlah dua sudut : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta . \cos\alpha - \sin\beta . \sin\alpha$. Jika $\alpha=\beta$, maka rumus cosinus dari jumlah dua sudut akan menjadi:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha &= \cos\alpha . \cos\alpha - \sin\alpha . \sin\alpha .\\ &= \cos 2\alpha - \sin 2\alpha\end{aligned}$$

Dari kesamaan trigonometri kita tahu bahwa: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ atau $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ atau $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ maka diperoleh juga:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha &= \cos 2\alpha - (1 - \cos 2\alpha)\\ &= \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - 1\\ &= 2\cos 2\alpha - 1 \text{ atau}\\ \cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha &= (1 - \sin 2\alpha) - \sin 2\alpha\\ &= 1 - 2\sin 2\alpha\end{aligned}$$

Sehingga rumus sudut rangkap dari cosinus adalah:

$$\begin{aligned}\mathbf{Cos 2\alpha} &= \mathbf{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}\\ &= \mathbf{2\cos^2\alpha - 1}\\ &= \mathbf{1 - 2\sin^2\alpha}\end{aligned}$$

Untuk rumus sudut rangkap dari tangens dapat diturunkan dengan cara yang sama. Untuk $\alpha=\beta$, maka rumus jumlah dua sudut $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$, menjadi:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\alpha) = \tan(2\alpha) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}\\ &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\end{aligned}$$

Jadi rumus sudut rangkap untuk tangens adalah:

$$\mathbf{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

Contoh soal:

1. Jika $\sin a = \dfrac{3}{5}$; hitunglah:
   a. sin 2a
   b. cos 2a
   c. tan 2a

Jawab:

a. $\sin a = \dfrac{3}{5}$, berdasarkan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka :

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan a = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \text{ sehingga}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a . \cos a = 2. = \frac{3}{5} . \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

b. $$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\tan 2a &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\\ &= \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}\end{aligned}$$

2. Jika $\tan \frac{a}{2} = s$, tentukan tan a:

Jawab:

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1 - \tan^2\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2 \times s}{1 - s^2} = \frac{2s}{1 - s^2}$$

3. Hitunglah tan $(22½)^0$

Jawab:

$\tan 45^0 = \dfrac{2\tan 2½^0}{1 - \tan^2 2½^0}$; kita tahu bahwa $\tan 45^0 = 1$, maka

$1 = \dfrac{2\tan 2½^0}{1 - \tan^2 2½^0}$; misal $\tan (22½)^0 = x$, maka $\tan^2(22½)^0 = x^2$,

diperoleh persamaan:

$$1 = \frac{2x}{1 - x^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = 2x$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ (Persamaan Kuadrat a=1, b=2, c=-1),

maka akar-akar persamaan kuadrat:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \Leftrightarrow x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1\,(-1)}}{2.1}$$

$$\Leftrightarrow x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{2 + 2}}{2} \Leftrightarrow x_{12} = -1 \pm \sqrt{2}$$

diperoleh : $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ (memenuhi)

$x_2 = -1 - \sqrt{2}$ (tidak memenuhi)

sehingga diperoleh $\tan 22½^0 = -1 - \sqrt{2}$

UNIT 9 JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS

Perhatikan kembali rumus cosinus dari jumlah dan selisih dua sudut berikut

cos (A + B) = cos A cos B – sin A sin B .... (1)

cos (A – B) = cos A cos B + sin A sin B .... (2)

Apabila persamaan (1) dan (2), dijumlahkan diperoleh:

cos (A + B) + cos (A – B) = 2cos A cos B .... (3)

Jika misalkan

A + B = C

A – B = D .... (4)

Dengan menggunakan metode eliminasi substitusi, dari sistem persamaan (4) diperoleh

A = ½(C + D) dan B = ½(C – D) .... (5)

Dari persamaan (3) dan (5), dapat diturunkan rumus berikut::

cos C + cos D = 2cos ½(C + D) cos ½(C – D) .... (6)

Dari persamaan (6), secara umum dapat diturunkan rumus jumlah cosinus dari dua sudut sebagai berikut.

cos A + cos B = 2cos ½(A + B) cos ½(A – B) .... (7)

Apabila persamaan (1) dikurangi dengan persamaan (2), diperoleh:

cos (A + B) – cos (A – B) = –2sin A sin B .... (8)

Dengan pergantian variabel berdasarkan persamaan (4) dan (5), diperoleh

cos C – cos D = –2sin ½(C + D) sin ½(C – D) .... (9)

Dari persamaan (9), secara umum dapat diturunkan rumus selisih cosinus dari dua sudut sebagai berikut.

cos A – cos B = –2sin ½(A + B) sin ½(A – B) .... (10)

Contoh:

Tentukan:

a. $\cos 75^0 + \cos 15^0$

b. $\cos 75^0 - \cos 15^0$

Jawab:

a. Dengan menggunakan rumus jumlah cosinus diperoleh

cos A + cos B = 2cos ½(A + B) cos ½(A – B)

$\cos 75^0 + \cos 15^0 = 2\cos \frac{1}{2}(75^0 + 15^0) \cos \frac{1}{2}(75^0 - 15^0)$

$\cos 75^0 + \cos 15^0 = 2\cos 45^0 \cos 60^0$

$= 2 (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. Dengan menggunakan rumus selisih cosinus diperoleh

$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos 75^0 - \cos 15^0 = -2\sin \frac{1}{2}(75^0 + 15^0) \sin \frac{1}{2}(75^0 - 15^0)$

$= -2\sin 45^0 \sin 60^0$

$= -2(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Perhatikan sinus dari jumlah dan selisih dua sudut berikut.

$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ .... (11)

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ .... (12)

Apabila persamaan (11) dan (12), dijumlahkan diperoleh:

$\sin (A + B) + \sin (A - B) = 2\sin A \cos B$ .... (13)

Dengan pergantian variabel berdasarkan persamaan (4) dan (5), diperoleh

$\sin C + \sin D = 2\sin \frac{1}{2}(C + D) \cos \frac{1}{2}(C - D)$ .... (14)

Dari persamaan (14), secara umum dapat diturunkan rumus jumlah sinus dari dua sudut sebagai berikut.

$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$ .... (17)

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa selisih sinus dari dua sudut, secara umum diberikan oleh

$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$ .... (18)

Contoh:

Tentukan:

a. $\sin 75^0 + \sin 15^0$

b. $\sin 75^0 - \sin 15^0$

Jawab:

a. Dengan menggunakan rumus jumlah sinus diperoleh

$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\sin 750 + \sin 150 = 2\sin \frac{1}{2}(750 + 150) \cos \frac{1}{2}(750 - 150)$

$= 2\sin 450 \cos 600$

$= 2 (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. Dengan menggunakan rumus selisih sinus diperoleh

$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos 750 - \cos 150 = 2\cos \frac{1}{2}(750 + 150) \cos \frac{1}{2}(750 - 150)$

$= 2\cos 450 \cos 600$

$= 2(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Latihan 1

1. Pada jajar genjang, buktikan bahwa jumlah kuadrat panjang diagonal sama dengan dua kali jumlah kuadrat panjang dua sisi yang berdekatan
2. Pada segitiga ABC, panjang AB = 3.0, AC = 7.0, dan BC = 9.0. Dari titik tengah BC, yaitu titik D ditarik garis berat ke tiitk A.
   a. Gambarkan segitiga ABC tersebut
   b. Tentukan panjang garis berat AD
3. Sebuah kapal di suatu teluk berjarak 16 mil dari lampu rumah dan 28 mil dari lampu rumah yang lain. Carilah jarak kedua lampu rumah tersebut apabila sudut yang terbentuk antara kedua lampu dari kapal adalah 120^0.
4. C mengirim sinyal ke A dan B. Dari sinyal yang dipantulkan diketahui B membentuk sudut 050^0 pada jurusan tiga angka terhadap posisi A. Jarak AC = 5.0 mil dan CB = 9.0 mil. B terletak di selatan A.
   a. Gambarkan kedudukan A, B dan C
   b. Tentukan besar jurusan tiga angka dari A dan B
5. Sederhanakan bentuk: $\cos A + \sin A \tan A$
6. Buktikan bahwa:
   a. $\sin B \cot B = \cos B$
   b. $\dfrac{1 + \cos C}{\cos C} = 1 + \sec C$
   c. $\dfrac{1 + \cos A}{\cos A} = \dfrac{\sin A}{1 - \cos A}$
7. Perhatikan bentuk $\dfrac{\cos A}{\sec A + \tan A}$. Nyatakan dalam sin A
8. Perhatikan bentuk $\dfrac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$. Nyatakan dalam tan A
9. Tentukan nilai eksak dari:
   a. $\sin 15^0$

b. $\cos \dfrac{5\pi}{12}$

c. $\tan 105^0$

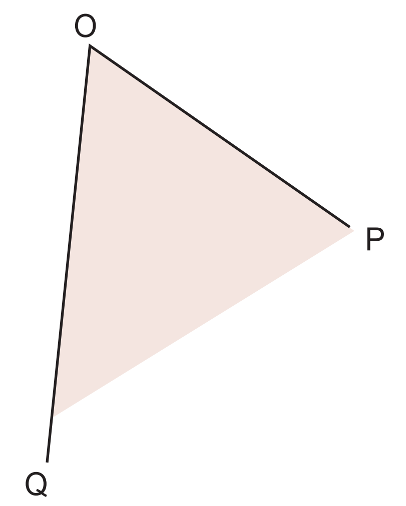
10. Apabila $\sin A = -1/3$ dan $\cos B = 1/5, 180^0 < A < 270^0$ dan $270^0 < B < 360^0$. Tetnukan $\cos (A - B)$
11. Sebuah pesawat berjarak 320 mil ke menara bandara dengan sudut depresi $34^0 20'$ dari kokpit. Pada saat yang sama sudut depresi ke pusat danau yang terletak antara pesawat dan bandara adalah $43^0 40'$.
    a. Gambarkan diagram posisi pesawat, bandara dan pusat danau
    b. Tentukan jarak pusat danau ke bandara
12. Tanjakan garis pada bidang koordinat sama dengan tangen sudut dari garis dengan sumbu - x. Jika ϕ adalah sudut yang dibentuk oleh perpotongan garis n dan p yang berturut-turut membentuk sudut ϕ_1 dan ϕ_2 terhadap sumbu – x di mana masing-masing memiliki tanjakan m_1 dan m_2, tunjukkan bahwa

$$\tan \phi = \frac{m_2 + m_1}{1 + m_2 m_1}$$

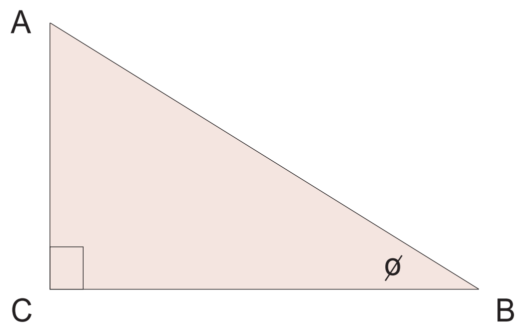
13. Dengan menggunakan trigonometri sudut ganda, tentukan nilai eksak dari:
    a. $\sin 120^0$
    b. $\tan 120^0$
14. Apabila $\sin B = 3/5$ dan B terletak di kuadran dua, maka: tentukan nilai eksak dari (a) sin 2B; (b) cos 2B
15. Apabila $\sin Y = -\dfrac{24}{25}$ dan $180^0 < Y < 270^0$, maka: tentukan nilai eksak dari (a) $\sin \dfrac{Y}{2}$; (b) $\cos \dfrac{Y}{2}$
16. Segitiga RST siku-siku di T dan sisi-sisi r, s dan t.
    a. Gambarkan segitiga RST tersebut.
    b. Tunjukkan bahwa: (1) $\sin 2R = \dfrac{2rs}{r^2}$; (2) $\cos 2R = \dfrac{s^2 - r^2}{t^2}$; (3) $\tan \dfrac{R}{2} = \dfrac{r}{t + s}$
17. Sederhanakan bentuk berikut.
    a. $\sin (A + B) + \sin (A - B)$
    b. $\cos (A + B) + \cos (A - B)$
18. hitunglah nilainya secara eksak:
    a. $\sin 45^0 + \sin 15^0$
    b. $\cos 45^0 + \cos 15^0$

Rangkuman

1. Sudut QOP, ∠QOP, ∠POQ, atau ∠O adalah besar daerah yang dibatasi oleh kaki sudut disebut dengan daerah sudut. Garis OQ dan OP disebut kaki-kaki sudut dan titik O merupakan titik sudut. Nama atau lambang titik sudut, yaitu titik O selalu ditulis ditengah. Kaki-kaki sudut tersebut membatasi dua daerah, yaitu daerah dalam yang berasir dan daerah luar yang tidak berarsir. Yang dimaksud besar sudut adalah sudut pada *daerah dalam*nya saja kecuali bila disebutkan secara lain



2. Sudut siku-siku dibentuk oleh dua garis tegak lurus sebagai kaki-kaki sudutnya. Simbol untuk menyatakan sudut siku-siku biasanya adalah “$\ulcorner$” atau “□”, yang diletakkan pada titik sudutnya. Sudut lancip besar sudutnya lebih kecil dari sudut siku-siku. Sudut tumpul besar sudutnya lebih besar dari sudut siku-siku.
3. Satuan standar atau baku untuk sudut yang digunakan adalah satuan derajat (*degree*). Satuan ini diperoleh dari daerah lingkaran yang dibagi dalam menjadi 360 bagian yang sama dari titik pusatnya. Besar setiap bagiannya adalah 1 derajat dan ditulis 1^0. Besar sudut *siku-siku adalah 90^0 dan sudut 0^0 membentuk sebuah garis lurus dan disebut sudut lurus*
4. Satuan sudut yang lebih sering digunakan dalam matematika dan bidang ilmu lain adalah radian yang didefinisikan sebagai rasio dari busur dari sektor lingkaran dengan panjang jari-jarinya.
5. Besar sudut *siku-siku adalah 90^0 dan sudut 0^0 membentuk sebuah garis lurus dan disebut sudut lurus. Besar sudut* $180^0 = \pi$ (dalam radian).
6. Perbandingan trigonometri atau perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku yang dihadapi suatu sudut adalah tertentu.



Besar sudut B adalah ϕ (dalam radian). Perbandingan sisi yang dihadapi sudut ϕ terhadap sisi miring disebut sinus (disingkat sin) dan perbandingan sisi dekat sudut pkn terhadap sisi miring disebut cosinus (disingkat cos). Jadi,

$$\sin\phi = \frac{\textit{sisi hadap}}{\textit{sisi miring}} = \frac{AC}{AB} \text{ dan } \cos\phi = \frac{\textit{sisi dekat}}{\textit{sisi miring}} = \frac{BC}{AB}$$

Perbandingan lainnya adalah tangen (disingkat tan), cosecan (disingkat csc), secan (disingkat sec), dan cotangen (disingkat cot)

$$\tan\phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{AC}{BC}; \cot\phi = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \sec\phi = \frac{1}{\cos\theta}; \text{ dan } \csc\phi = \frac{1}{\sin\theta}$$

7. Nilai trigonometri dari sebuah sudut dapat dicari dengan menggunakan tabel trigonometri atau dengan menggunakan kalkulator ilmiah (*scientific calculator*) dengan menentukan dulu satuan sudut yang digunakan
8. Perbandingan dan identitas trigonometri berbagai sudut

   $\sin(\pi - \phi) = \sin\phi$; $\quad \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$

   $\sin(\pi + \phi) = -\sin\phi$; $\quad \cos(\pi + \phi) = -\cos\phi$

   $\sin(-\phi) = -\sin\phi$; $\quad \cos(-\phi) = \cos\phi$

   $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ $\quad \cos(\frac{1}{2}\pi - \phi) = \sin\phi$

   $\sin(\frac{1}{2}\pi - \phi) = \cos\phi$
9. Sebuah fungsi f adalah aturan yang memadankan tiap objek x dari himpunan pertama (disebut dengan *daerah asal, daerah definisi*) dengan nilai unik y = f(x) dari himpunan kedua (disebut dengan *daerah nilai*). Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal (misalnya f, g, atau H). Maka f(x), dibaca "f dari x atau f pada x", menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x.
10. Fungsi sinus memiliki periode 2π sehingga $f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$. Nilai invers fungsi sinus atau arcus sinus dari y, ditulis arc sin y atau $\sin^{-1} y$ dari sebuah sudut diberikan untuk $-\frac{1}{2}\pi$ sampai $\frac{1}{2}\pi$.
11. Fungsi cosinus memiliki periode 2π sehingga $f(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$. Nilai invers fungsi sinus atau arcus cosinus dari y, ditulis arc cos y atau $\cos^{-1} y$ dari sebuah sudut diberikan untuk 0 sampai π.
12. Fungsi tangen memiliki periode π sehingga $f(x) = \tan x = \tan(x + \pi)$. Nilai invers fungsi tangen atau arcus tangen dari y, ditulis arc tan y atau $\tan^{-1} y$ dari sebuah sudut diberikan untuk $-\frac{1}{2}\pi$ sampai $\frac{1}{2}\pi$
13. Aturan sinus dan cosinus. Pada segitiga ABC dengan sudut A, B, dan C serta sisi a, b dan c yang menghadap sudut A, B, dan C, berlaku

   $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

   Aturan sinus dan cosinus dapat digunakan untuk menurunkan rumus luas segitiga atau menentukan sisi-sisi segitiga
14. Sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut.

   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

   $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

   Sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut dapat digunakan untuk menentukan trigonometri lainnya dari jumlah dan selisih dua sudut atau menentukan sinus dan cosinus sudut rangkap.
15. Jumlah dan selisih sinus dan cosinus

   $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$

   $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

   Sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut dapat digunakan untuk menentukan trigonometri lainnya dari jumlah dan selisih dua sudut atau menentukan sinus dan cosinus sudut rangkap.

Kunci Jawaban

UNIT 1: Satuan Sudut

Latihan 1

-

Latihan 2

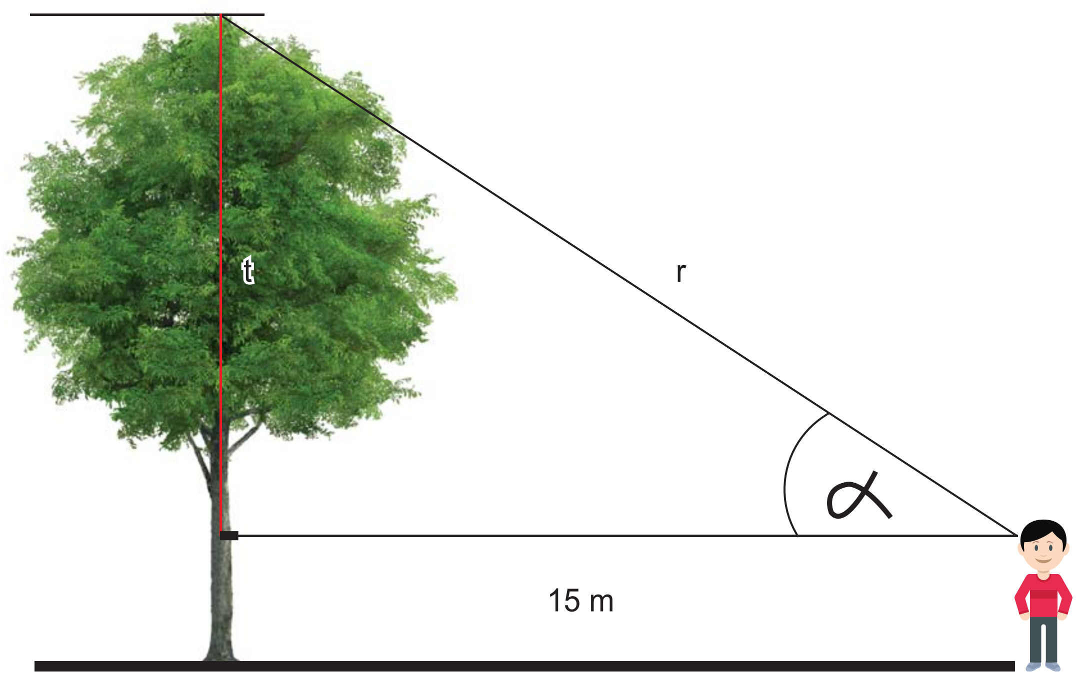
1. a. $270^0 = (\pi/180^0)(270^0) = 2/3\pi$
   b. $0^0 = (\pi/180^0)(0^0) = 0$
   c. $360^0 = (\pi/180^0)(360^0) = 1/2\pi$
   d. $-45^0 = (\pi/180^0)(-45^0) = 1/4\pi$
2. Satu putaran jarum jam = 12 jam = 12(60) = 720 menit sebesar 2π radian.
   a. Sudut putaran 15 menit = $15/720(2\pi) = 1/24\ \pi$
   b. Sudut putaran 30 menit = $30/720(2\pi) = 1/12\ \pi$
   c. Sudut putaran 45 menit = $45/720(2\pi) = 1/8\ \pi$
   d. Sudut putaran 60 menit = $60/720(2\pi) = 1/6\ \pi$
   e. Sudut putaran 1 menit = $1/720(2\pi) = 1/360\ \pi$
   f. Sudut putaran 90 menit = $90/720(2\pi) = 1/4\ \pi$
   g. Sudut putaran 30 detik = $(30/60)/720(2\pi) = 1/720\ \pi$
   h. Sudut putaran 1 jam = $60/720(2\pi) = 1/6\ \pi$
3. a. Pukul sudut jarum panjang dan pendek siku-siku = $(\pi/180^0)(90^0) = ½\ \pi$
   b. Pukul sudut jarum panjang dan pendek lurus = $(\pi/180^0)(180^0) = \pi$
   c. Pukul sudut jarum panjang dan pendek siku-siku = $(\pi/180^0)(90^0) = ½\ \pi$
   d. Pukul sudut jarum panjang dan pendek berimpit = $(\pi/180^0)(0^0) = 0$
   e. Pukul sudut jarum panjang dan pendek $90^0 + 15^0 = (\pi/180^0)(105^0) = 7/12\ \pi$

UNIT 2: Perbandingan Trigonometri

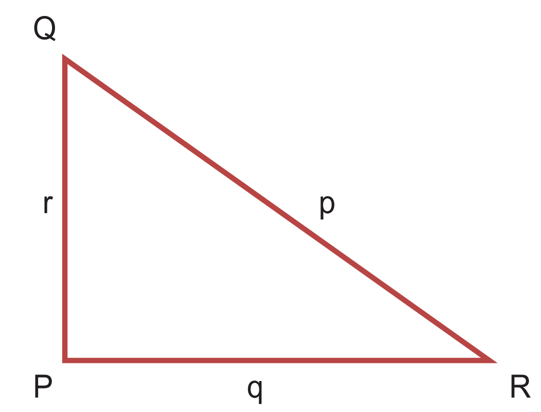
Latihan 1

1. Dari sin A = 0.5 = ½, diperoleh sisi dekat pada segitiga ABC adalah $\sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$.
   a. cos A $= 1/2\ \sqrt{3}$ dan tan A = sin A/cos A $= (1/2)/(1/2\ \sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$
   b. sec A = 1/cos A $= 1/(1/2\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$ dan cot A = 1/tan A $= 1/(1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}$
2. a. $\sin 20^0 = 0.342$
   b. tan 0.1= 0.1003
   c. $\cos 70^0 = 0.342$
   d. $\csc 88^0 = 1/\sin 88^0 = 0.1.0006$
   e. cot 0.33 = 2.91949
   f. $\tan 78^0 = 4.7046$

3. a. Sketsa kedudukan pohon dan pengamat

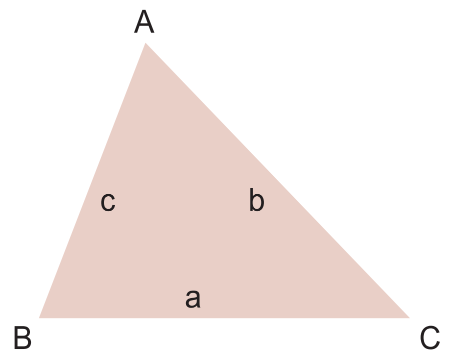


   b. $\cos \alpha$ = jarak mendatar/r = 15/r = 0.88 ➔ r = 15/0.88 = 17.04545
      tinggi pohon t $= \sqrt{(r^2 - 15^2)} = \sqrt{(17.04545^2 - 15^2)} = 8.0961$ meter
4. Segitiga PQR siku=siku di P



   $p^2 = q^2 + r^2$
   a. $\sin P = \sin 90^0 = 1$ dan tan P = tidak didefinisikan
   b. sec P = 1/cos P = tidak didefinisikan dan cot P = 0
5. Sisi=sisi segitiga memenuhi kesamaan teorema Pythagoras sehingga segitiga tersebut siku=siku.
   a. $\cos \alpha = b/a$ dan $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = (\frac{r}{a})/(b/a) = r/b$
   b. $\sec \alpha = 1/\cos \alpha = a/b$ dan $\cot \alpha = b/r$

6. a. Sketsa segitiga ABC.



b. Rumus menentukan tinggi segitiga ➔ sin A = t_1/b
➔ t_1 = b sin A dan cos A = x/b
Dari sudut B, sin B = t_1/a dan cos B = (c – x)/a
➔ cos A = (c- a cos B)/b

c. Jadi sin A = a/b sin B dan tan A = (a/b sin B)/[(c – a cos B)/b]
tan A = a sin B/(c – a cos B)

Latihan 2

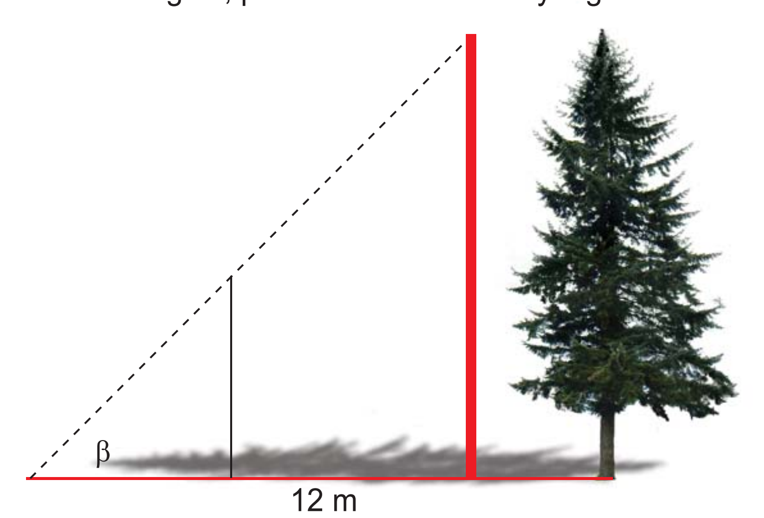
1. a. sin 120^0 = 0.86602
   b. tan 7 = 0.87144
   c. cos 170^0 = 0.98481
   d. csc 288^0 = -1.05146
   e. cot 4.33 = 0.402185
   f. tan 200^0 = 0.36397
2. a. sin -30^0 = -0.5
   a. tan -5 = 3.38051
   b. cos -220^0 = -0.76604
   c. csc -45^0 = -1.41421
   d. cot -4.12 = -0.67302
   e. tan -200^0 = -0.36397
3. Ya.
4. cos a = $\sqrt{}(1^2 - 0.456^2)$ = 0.88998
5. a. cos A = $\sqrt{}(1 - t^2)$
   b. tan A = sin A/cos A = t/$\sqrt{}(1 - t^2)$
   c. sec B = 1/cos B = 1/t
   d. sin B = $\sqrt{}(1 - t^2)$
6. a. Sudut ϕ tumpul
   b. sin ϕ = 12/$\sqrt{}(12^2 + 5^2)$ = 12/13, cos ϕ = -5/$\sqrt{}(12^2 + 5^2)$ = -5/13, tan ϕ = -12/5

Latihan 3

1. a. sin 30^0 = 0.5
   b. cos 60^0 = 0.5
   c. tan 45^0 = 1
   d. sin 45^0 = 0.70711
   e. sin 15^0 = 0.258819
   f. cos 30^0 = 0.866025
   g. tan 60^0 = 1.73205
   h. sin 45^0 = 0.70711
2. sin A = -3/5 dan cos A = -4/5
3. a. positif
   b. negatif
4. a. $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$
   b. $\csc^2 C - \cot^2 C = 1$
5. sin 30^0 = BC/20 = ½ ➔ BC = 10 cm dan AB = $\sqrt{}(20^2 – 10^2)$ = 10$\sqrt{3}$ cm
6. cos 60^0 =Jarak pohon/jarak pandang = 60/jarak pandang = ½ ➔ jarak pandang = 2(60) = 120 m. Tinggi pohon = $\sqrt{}(120^2 – 60^2)$ = 60$\sqrt{3}$ m
7. Sudut OBA = (180^0 - 45^0)/2 = 67.5^0. Panjang garis tinggi yang dihadapi sudut O adalah 9/$\sqrt{2}$ cm. Tali busur AB = (panjang garis tinggi dihadapi susut O)/sin B = (9/$\sqrt{2}$)/sin 67.5^0 = 6.8883 cm
8. α = 45^0, atau α = 180^0 + 45^0 = 225^0, dan seterusnya.

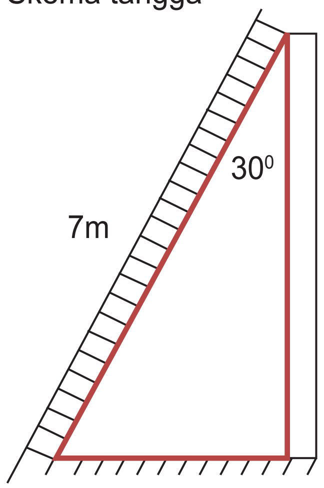
Latihan 4

1. a. skema tongkat, pohon cemara dan bayangan



   b. Tinggi benda sama dengan panjang bayangannya, maka sudut β = 45^0
   c. sin β = 1/$\sqrt{2}$, cos β = 1/$\sqrt{2}$ dan tan β = sin β/cos β = 1
   d. Bayangan cemara = tinggi cemara = 12 m

2. a. Skema tangga

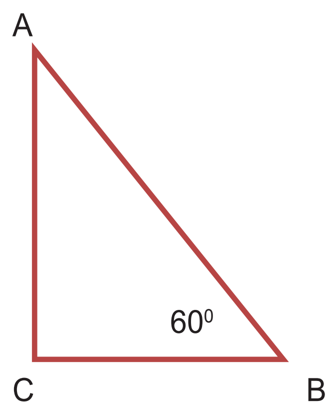


b. sin 30^0 = (jarak kaki tangga ke tembok)/panjang tangga

jarak kaki tangga ke tembok = panjang tangga x sin 30^0 = 7(1/2) = 7/2 m

c. -

3. a. Skema segitiga ABC



b. AC = AB sin 60^0, BC = AB cos 60^0. Perbandingan BC : AC : AB = AB cos 60^0 : AB sin 60^0 : AB = cos 60^0 : sin 60^0: 1

c. sin 60^0 = 0.86602; cos 60^0 = ½ ; tan 60^0 = 1.73205

4. a. Kecepatan menyeberang merupakan resultan (hasil) kecepatan aliran sungai dan kecepatan tegak lurus anak = $\sqrt{(2^2 + 1.5^2)}$ = 2.5 m/det. Lebar sungai 15 m, maka waktu yang diperlukan menyeberang 15/1.5 = 10 detik

b. Anak berenang sejauh (2.5)(10) = 25 m samapi di C

c. cos BAC = AB/AC = 15/25 ➔ sudut BAC = 53.1301°. Sudut BCA = 180° - 90° – 53.1301° = 36.8699°

5. Perbandingan sisi-sisi segitiga 3 : 4 : 5. Salah satu sisi 10 cm, maka sisi lain adalah 8 cm dan 6 cm, atau 7.5 cm dan 12.5 cm, atau 13 1/3 cm dan 16 2/3 cm. Sudut-sudut segitiga 36.8699°, 53.1301° dan 90°

Latihan 5

1. Tinggi menara = (jarak ke pengamat) tan 35° = 100(0.70021) = 70.021 m
2. Tinggi menara = (jarak ke pengamat) tan 15° = 100(0.26795) = 26.795 m
3. Jarak mobil ke gedung = (tinggi gedung)/tan 40° = 30/0.8391 = 35.7526 m
4. Misalkan jarak anak pertama ke pohon x dan tinggi pohon t, maka diperoleh persamaan t = x tan 60° dan t = (200 – x) tan 30°. Jadi

   x tan 60° = (200 – x) tan 30°➔ x = 200 tan 30°/(tan 60° - tan 30°) = 100

   Jadi, tinggi pohon = x tan 60° = 100(1.73205) = 173.205 m
5. Misalkan tinggi satelit t, jarak mendatar ke pengamat pertama x, maka

   t = x tan 60° dan t = (x +5)tan 30°. Dari kedua persamaan diperoleh

   x = 5tan 30°/(tan 60° - tan 30°) = 2.5 km

   Tinggi satelit t = x tan 60° = 2.5(1.73205) = 4.33 km

UNIT 3: Persamaan dan Fungsi Trigonometri

Latihan 1

1. a. $f(1) = (1)^2 – 4 = -3$

   b. $f(0) = (0)^2 – 4 = -4$

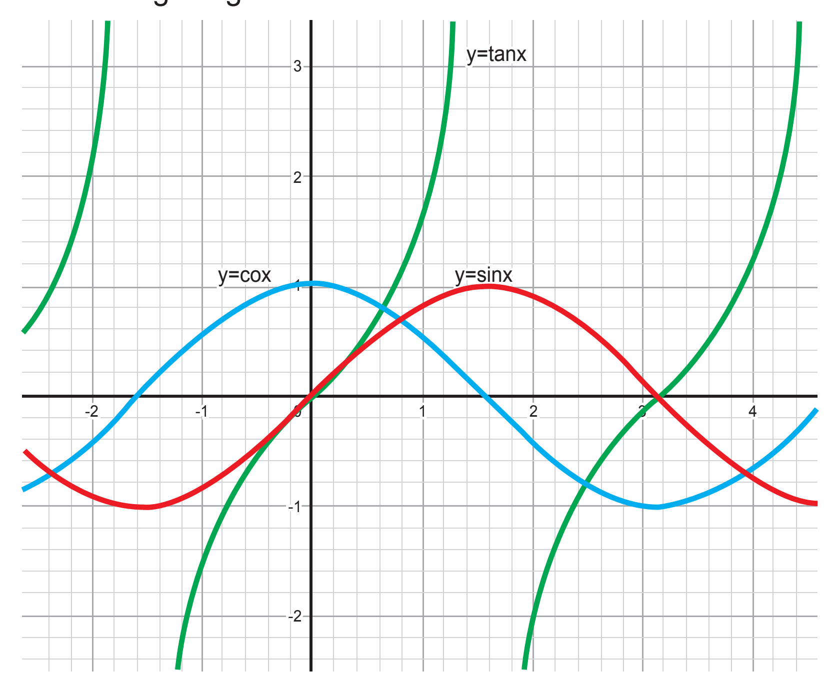
   c. $f(-6) = (-6)^2 – 4 = 32$

   d. $f(-2) = (-2)^2 – 4 = 0$

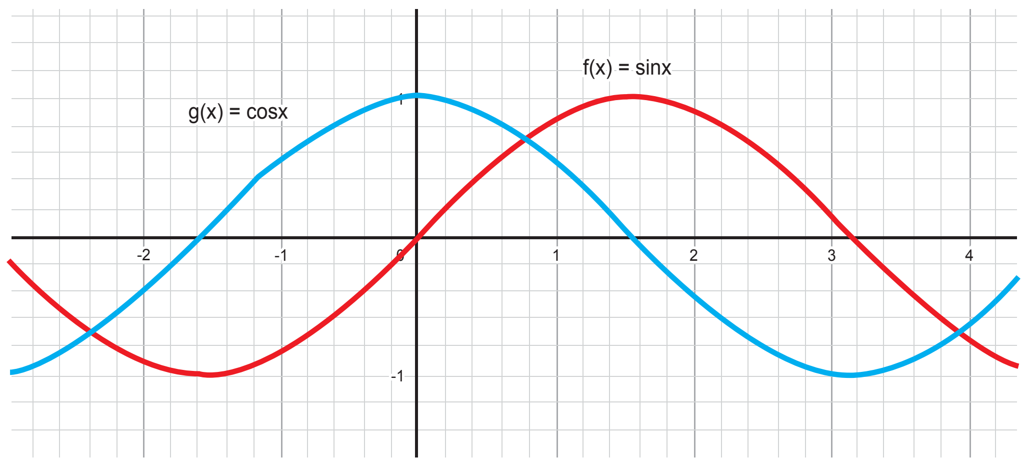
   e. e. $f(k) = k^2 – 4$

   f. $f(2t + 1) = (2t + 1)^2 – 4$

2. Grafik fungsi trigonometri

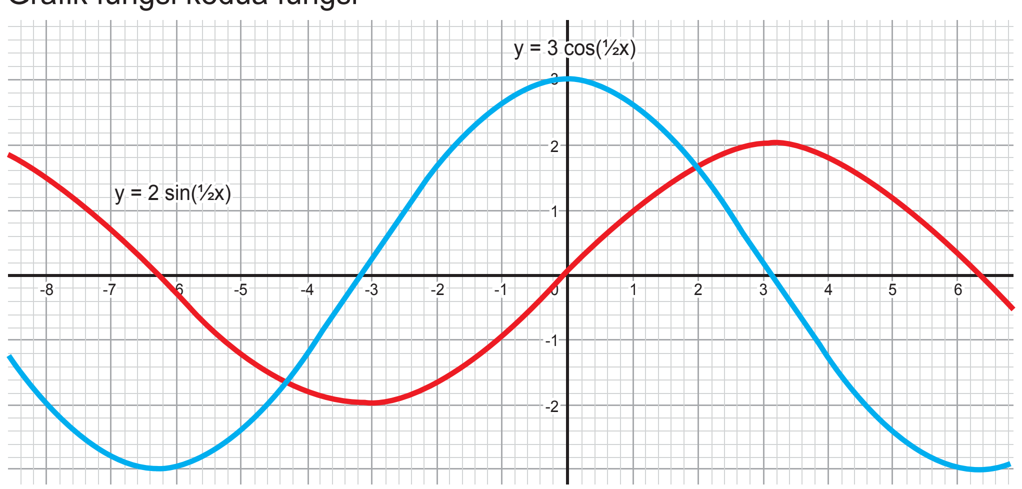


3. a. $x = \sin^{-1}(-0.787) = 0.905931$
   a. $x + \pi = \cos^{-1}(0.655) = 0.85661$ ➔ $x = 0.85661 - \pi$
   b. $-x = \tan^{-1}(3.22) = 1.26968$ ➔ $x = -1.26968$
4. a. $h(0) = 0 + \tan 0 = 0$
   b. $h(1) = 1 + \tan 1 = 2.55741$
   c. $h(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi + \tan \frac{1}{2}\pi$ = tidak didefinisikan
5. Grafik fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$



Titik potong kedua grafik terjadi jika $\sin x = \cos x$ atau $\tan x = 1$, yaitu titik $x = \frac{1}{4}\pi$ dengan periode π

6. Grafik fungsi kedua fungsi

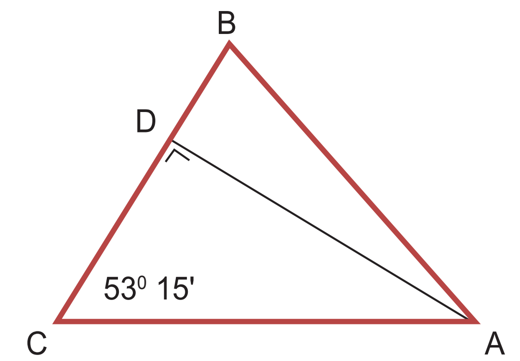


7. Jika $\cos A = 3/5$, maka sisi depan $= \sqrt{(5^2 - 3^2)} = 4$ sehingga $\sin A = 4/5$ dan

$$\frac{\cos A \tan A}{\csc A} = (3/5)(4/3)/[1/(4/5)]$$

$$= (12/15)/(5/4) = (4/5)(4/5) = 16/25$$

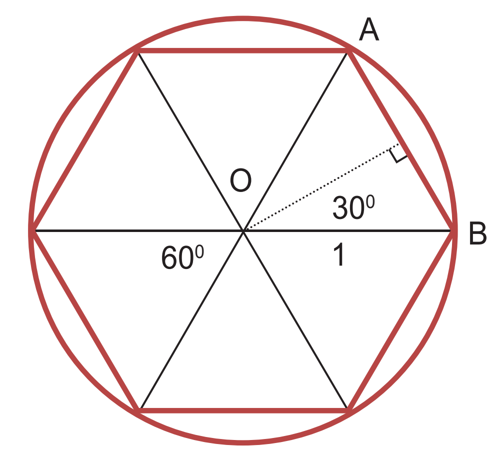
8. Jika $\tan A = \dfrac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$, maka sisi miring $= \sqrt{(1 - p^2 + p^2)} = 1$ sehingga $\sin A = \sqrt{(1 - p^2)}$ dan $\cos A = p$
9. Tinggi jajar genjang $= h = 12 \cos 60^o = 12(1/2) = 6$ cm
   a. Gambar segitiga ABC



   b. $\sin C = AD/AC$ ➔ $AD = AC \sin C$

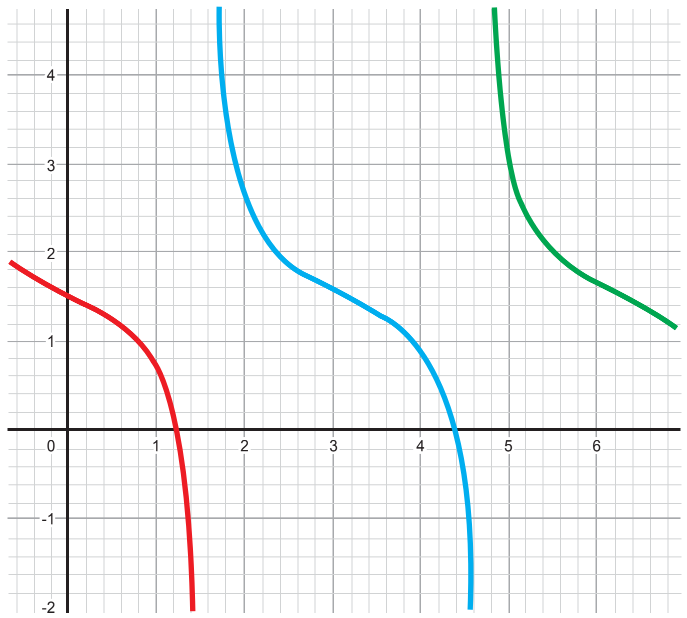
$$= 34 \sin 53^0\ 15' = (34)(0.80125) = 27.24263$$

11. Segi enam beraturan pada sebuah lingkaran berjari-jari 1 satuan



Pada segi-6 beraturan di atas, sudut sektor $360^o/6 = 60^o$. Panjang AB $= 2 \sin 30^0$. Pada segi-n beraturan, sudut sektornya $360^o/n$, sudut setengah sektornya $(360^o/n)/2 = 180^o/n$, maka panjang sisi segi-n $= AB = 2 \sin(180^o/n)$.

12. Grafik peluncuran roket.



UNIT 4: Identitas Trigonometri

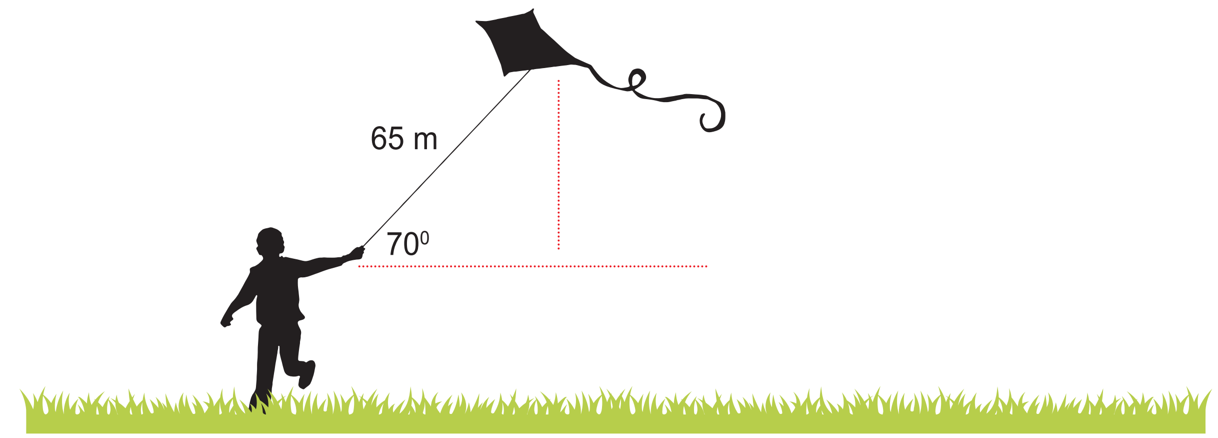
Latihan 1

1. a. Fungsi cosinus periode $2\pi \rightarrow \cos(4\pi + x) = \cos(x + 2\pi + 2\pi) = \cos x$
   b. Fungsi sinus periode $2\pi \rightarrow \sin(3\pi + x) = \sin(x + 2\pi + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$
   c. $\cos(-\pi - x) = \cos -(\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$
   d. $\sin(-\pi - x) = \sin -(\pi + x) = -\sin(\pi + x) = \sin x$
2. a. $\sin\phi = t \rightarrow \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \rightarrow \cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi = 1 - t^2 = (1 + t)(1 - t)$
   b. $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \rightarrow \cos^2\phi/\cos^2\phi + \sin^2\phi/\cos^2\phi = 1/\cos^2\phi$
   $1 + \tan^2\phi = 1/\cos^2\phi = 1/(1 - \sin^2\phi) = 1/(1 - t^2)$
   $\tan^2\phi = 1/(1 - t^2) - 1$
3. a. Apabila $\sin\phi \cos\phi = ½$, maka $\sin^2\phi - \sin^4\phi = \sin^2\phi(1 - \sin^2\phi) =$
   $\sin^2\phi \cos^2\phi = (\sin\phi \cos\phi)^2 = (½)^2 = ¼$
   b. $\sin^2\phi - \sin^4\phi = ¼ \rightarrow t - t^2 = ¼$
   c. Dari persamaan $t - t^2 = ¼$, diperoleh $t^2 - t + ¼ = 0$
   $(t - ½)^2 = 0 \rightarrow t = ½ \rightarrow \sin^2\phi = ½ \rightarrow \sin\phi = 1/\sqrt{2}$
4. a. Misalkan $\cos\phi = t \rightarrow 6t^2 + t - 1 = 0 \rightarrow (6t - 1)(t + 1) = 0$
   $t = 1/6$ atau $t = -1 \rightarrow \cos\phi = 1/6$ atau $\cos\phi = -1$
   $\phi = 1.40335$ atau $\phi = \pi$
   b. Misalkan $\sin\phi = t \rightarrow -5t^2 + t + 1 = 0$
   Diskriminan, D = b^2 – 4ac =1^2 – 4(-5)(1) = 21
   $t = (-b \pm \sqrt{D})/(2a) = (-1 \pm \sqrt{21})/(-10)$
   $t = -0.35826$ atau $t = 0.55826$
   $\phi = \sin^{-1}(-0.35826)$ atau $\phi = \sin^{-1}(0.55826)$
   $\phi = -0.366403$ atau $\varphi = 0.59229$
   c. Misalkan $\tan\phi = t \rightarrow t - t^2 + 0.5 = 1$
   Diskriminan, D = b^2 – 4ac =1^2 – 4(-1)(0.5) = 3
   $t = (-b \pm \sqrt{D})/(2a) = (-1 \pm \sqrt{3})/(-2)$
   $t = -0.366025$ atau $t = 1.366025$
   $\phi = \tan^{-1}(-0.366025)$ atau $\phi = \tan^{-1}(1.366025)$
   $\phi = -0.350879$ atau $\phi = 0.93888$

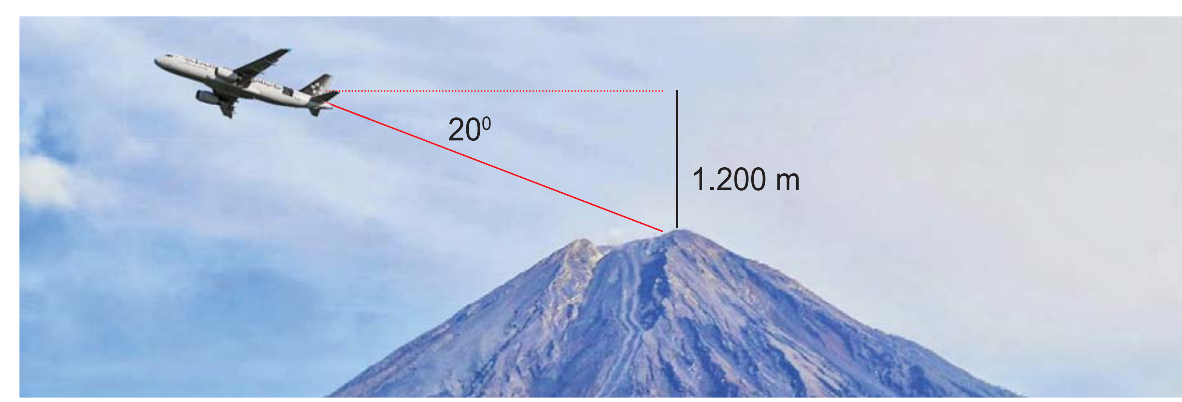
UNIT 5: Merancang Model Matematika untuk Menyelesaikan Masalah Trigonometri

Latihan 1

1. a. Sketsa posisi layang-layang, benang dan Riki

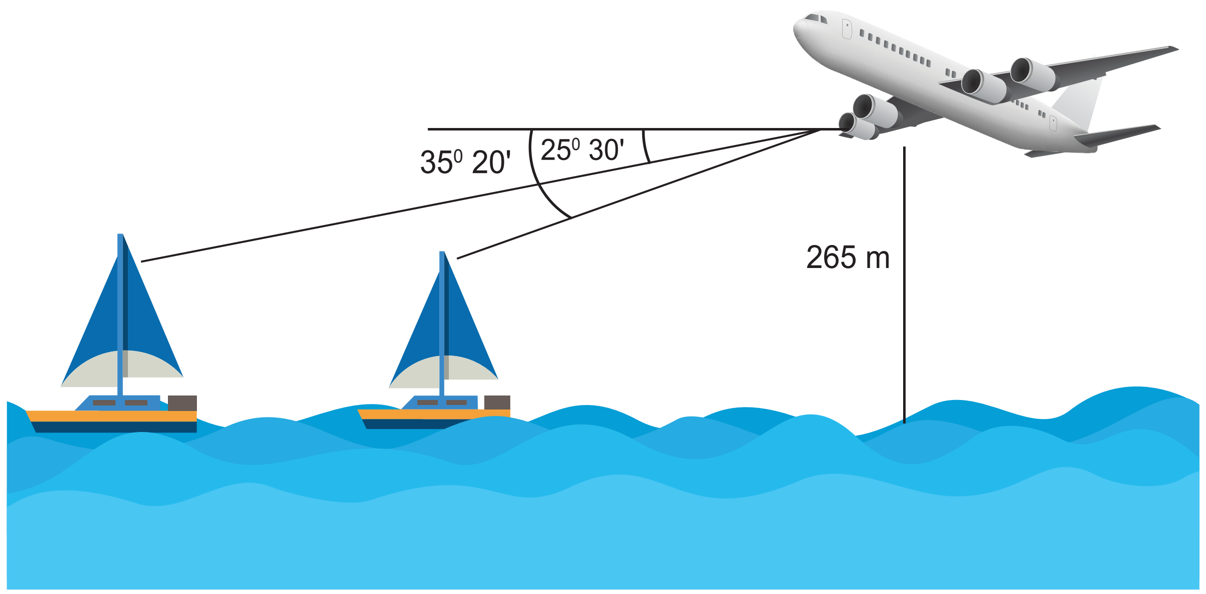


   b. Tinggi layang-layang = 65 sin 70^0 = 61.08 m
2. Tinggi tiang bendera = (jarak ke kaki tiang bendera) tan 53^0 = 10 tan 53^0
   = 13.27045 m
3. a. Sketsa puncak gunung dan pesawat



   b. Jarak pesawat ke puncak gunung = (tinggi pesawat dari puncak)/sin 28^0
   = 1200/sin 28^0 = 2556.0654 m

4. a. Sketsa posisi pesawat dan kapal laut

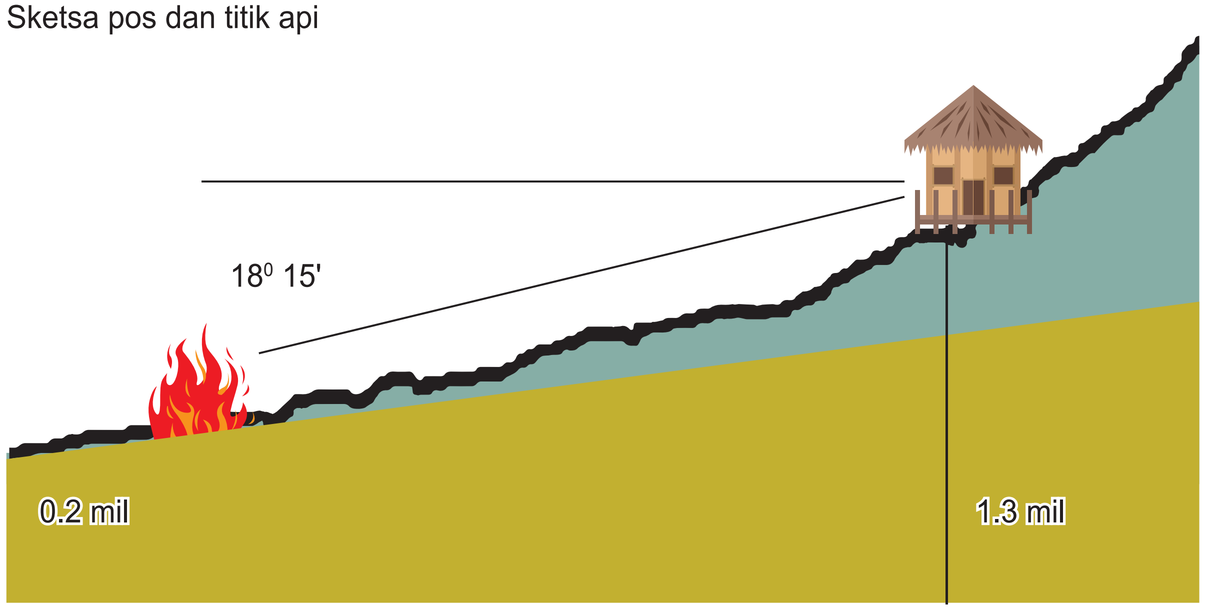


b. Jarak pesawat ke kapal pertama = (tinggi pesawat) tan 35⁰ 20’
= (265)(0.70891) = 187.862 m

Jarak pesawat ke kapal kedua = (tinggi pesawat) tan 25⁰ 30’
= (265)(0.47697) = 126.3985 m

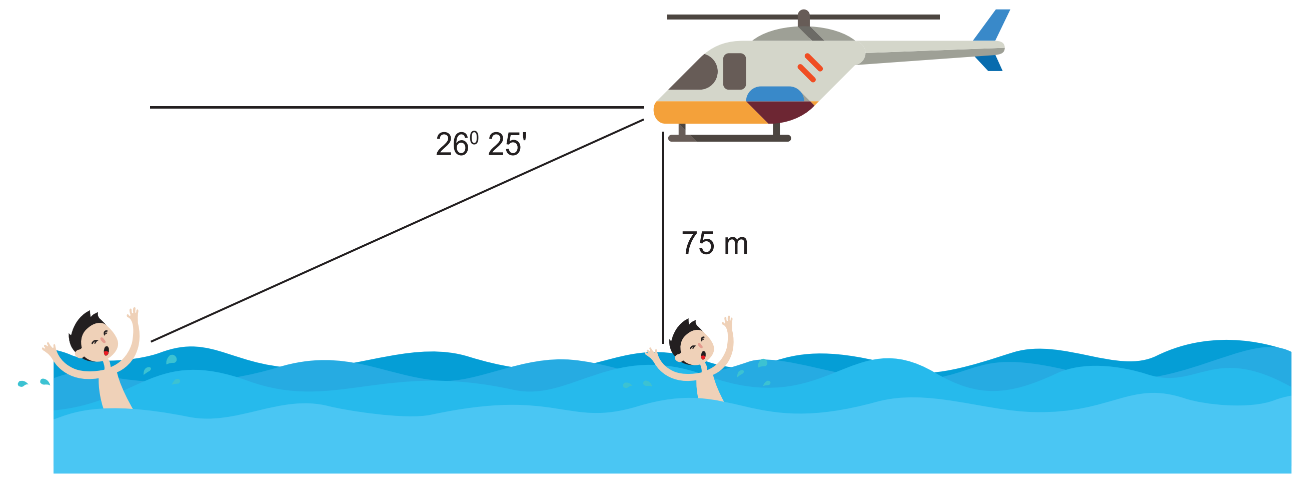
Jarak dua kapal laut = 187.862 m - 126.3985 m = 61.4635 m

5. a. Sketsa pos dan titik api



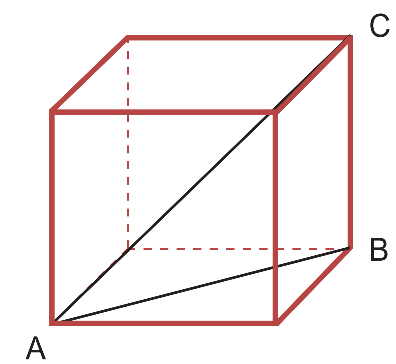
b. Jarak titik api ke pos = (selisih ketinggian pos dan titik api)/sin18⁰15’
= (1.3 – 0.2)/0.3131638 = 3.51254 mil

6. Sketsa penyelamatan penumpang



Jarak antar orang berpelampung = (tinggi helikopter)/tan 26⁰25’
= 75/0.496767 = 150.9762 m

7. a. Sketsa kubus dan segitiga ABC



b. Misalkan rusuk kubus x. Panjang AB = x√2. Panjang AC = x√2. Jadi, tan ∠ACB = AB/BC
= x√2/x = √2
∠ACB = tan⁻¹ (√2) = 54.73561°
∠BAC = 180° - 90° - 54.73561° = 35.26439°

UNIT 6: Aturan Sinus dan Cosinus

Latihan 1

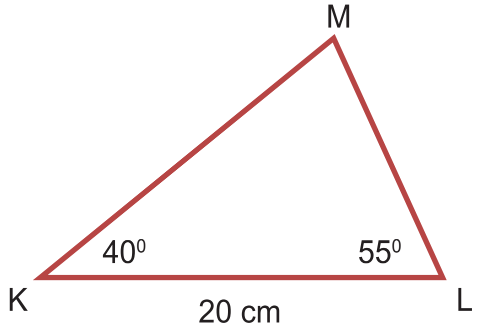
1. a. Sudut R = 180° - 42° - 70° = 68°

b. Menurut aturan sinus, PQ/sin R = PR/sin Q

PQ = (PR)sin R/sin Q
= 10 sin 68°/sin 70° = 9.8669 cm

QR = (PR)sin P/sin Q
= 10 sin 42°/sin 70° = 7.12074 cm

2. Sketsa segitiga KLM



a. Sudut M = $180^o - 40^o - 55^o = 85^o$

b. Menurut aturan sinus, KM/sin L = KL/sin M

KM = (KL)sin L/sin M

= 20 sin 55^o/sin 85^o = 16.4456 cm

LM = (KL)sin K/sin M

= 20 sin 40^o/sin 85^o = 12.90486 cm

3. a. Menurut aturan sinus, luas segitiga ABC = ½ bc sin A

= ½ (AC) (AB) sin A

= ½ (15) (18) sin 40^0 = 86.7763 cm^2

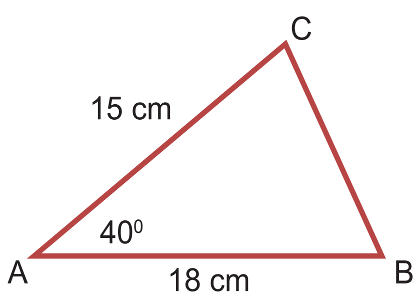
b. Tinggi segitiga dari C = AB sin A = 18sin 40^0 = 11.5702 cm

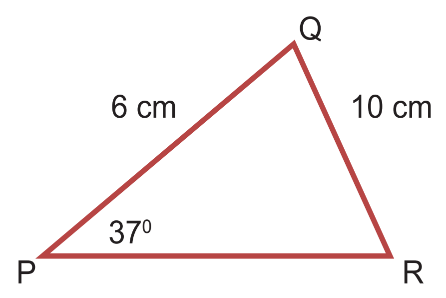
c. Menurut aturan cosinus, $BC^2 = AC^2 + AB^2 – 2AC\ AB \cos A$

$BC^2 = 15^2 + 18^2 – 2(15)(18)\cos 40^0$

= 135.336

BC = $\sqrt{135.336}$ = 11.334 cm





5. Menurut aturan sinus, PQ/sin R = QR/sin P

sin R = PQ sin P/QR

= 6sin 37^o/10 = 0.361089

Sudut R = $\sin^{-1}$ (0.361089) = 21.16709^o

Sudut Q = $180^0 - 37^0 – 21.16709^0$

= 121.83291^0

Menurut aturan cosinus, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 – 2PQ\ QR \cos Q$

$= 6^2 + 10^2 – 2(6)(10) \cos (121.83291^0)$

= 199.29326

PR = $\sqrt{199.29326}$ = 14.11713 cm

UNIT 7: Cosinus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

UNIT 8: Sinus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Latihan 1

6. a. cos (2a + d) = cos 2a cos d – sin 2a sin d

= $\cos^2$ a cos d – (2sin a cos a) sin d

= cos a (cos a cos d – 2sin a sin d)

b. cos (3a – 2d) = cos 3a cos (-2d) – sin 3a sin (-2d)

= cos 3a cos 2d + sin 3a sin 2d

c. sin ($x^o + y^o$) = sin x^o cos y^o + cos x^o sin y^o

d. $\sin (\frac{a - b}{2})$ = sin ½a cos ½b - cos ½a sin ½b

e. tan ($p^o + 2q^o$) = (tan p^o + tan $2q^o$)/(1 – tan p^o tan $2q^o$)

f. $\tan (\frac{s}{3} - \frac{t}{2})$ = [tan (s/3) - tan (t/2)]/[1 + tan (s/3) tan (t/2)]

2. sin α= 4/5, sinβ 5/13 = ➔cos α = 3/5 dan cos β = 12/13

➔ tan α = 4/3 dan tan β = 5/12

a. cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β = (3/5)(12/13) – (4/5)(5/13)

= 16/65

b. cos (α - β) = cos α cos β + sin α sin β = (3/5)(12/13) + (4/5)(5/13)

= 56/65

c. sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β = (4/5)(12/13) + (3/5)(5/13)

= 63/65

d. sin (α - β) = sin α cos β - cos α sin β = (4/5)(12/13) – (3/5)(5/13)

= 33/65

e. tan (α + β) = (4/3 + 5/12)/[1- (4/3) (5/12)]

= 3 15/16

f. tan (α - β) = (4/3 - 5/12)/[1+ (4/3) (5/12)]

= 33/56

3. a. Misalkan 2a – c = x dan a – 2c = y, maka cos (2a-c).cos (a-2c) – sin (2a-c).cos(a-2c)

= (½) 2cos x cos y – (½) 2sin x cosy

= ½ [cos (x+y) +cos(x-y)] – ½ [sin (x+y) +sin(x-y)]

$= ½ [\cos 1/3(a-c) + \cos(a+c)] – ½ [\sin 1/3(a-c) + \sin(a+c)]$

b. Misalkan $2x – y = a$ dan $x – 2y = b$, maka

$\sin (2x-y).\cos(x-2y) – \cos (2x-y).\sin(x-2y) = \sin a \cos b – \cos a \sin b$
$= \sin (a + b)$
$= \sin (2x - y + x – 2y)$
$= \sin (3x - 3y) = \sin 3(x - y)$

4. a. $\sin 105^0 = \sin (90 + 15)^0 = \sin 90^0 \cos 15^0 + \cos 90^0 \sin 15^0$
$= \cos 15^0 = \cos (45 – 30)^0$
$= \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$
$= (1/\sqrt{2})(\sqrt{3}/2) + (1/\sqrt{2})(1/2) = ¼\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$

a. $\tan 105^o = -\cot 15^0 = -3.732051$

b. $\cos 105^o = \sin 15^0 = -0.258819$

5. a. $\sin 120^0 = \cos 30^0 = 0.866025$

a. $\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -0.866025$

b. $\tan 135^0 = -\tan 45^0 = -1$

6. a. $\sin (90^0 - \alpha) = \cos \alpha$ dan

$\sin (90^0 + \alpha) = \sin 90^0 \cos \alpha + \cos 90^0 \sin \alpha = \cos \alpha$

Jadi, $\sin (90^0 - \alpha) = \sin (90^0 + \alpha)$

b. $\cos (90^0 – \alpha) = \sin \alpha$ dan

$-\cos (90^0 + \alpha) = -[\cos 90^0 \cos \alpha - \sin 90^0 \sin \alpha] = \sin \alpha$

Jadi, $\cos (90^0 - \alpha) = -\cos (90^0 + \alpha)$

5. a. $\sin a = \cos b$, maka jumlah sudut a dan b adalah 90^0.

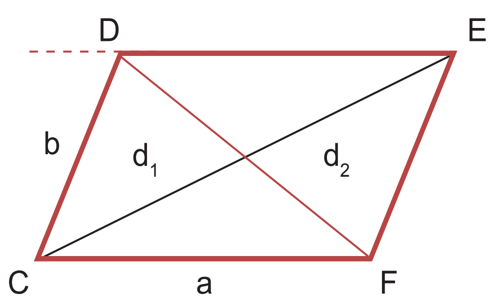
Jadi $\sin (a + b) = \sin 90^0 = 1$

b. $\tan a = \tan b$, maka $a = b$ ➔ $a – b = 0$ ➔ $\tan (a – b) = \tan 0 = 0$

UNIT 9: Jumlah dan Selisih Sinus dan Cosinus

Latihan 1

1. Perhatikan diagram jajar genjang berikut



Harus ditunjukkan $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Menurut aturan cosinus

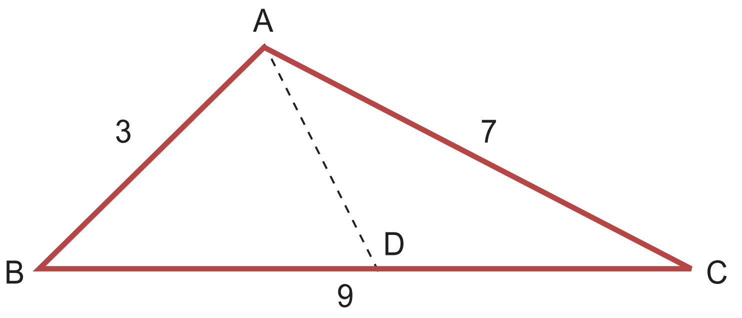
$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos F = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^o – C)$

$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Kedua persamaan dijumlahkan

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2) – 2ab [\cos (180^o – C) + \cos C]$
$= 2(a^2 + b^2) – 2ab [\cos 180^o \cos (–C) - \sin 180^o \sin (-C) + \cos C]$
$= 2(a^2 + b^2) – 2ab [-\cos C – 0 + \cos C] = 2(a^2 + b^2)$

2. a. Sketsa segitiga ABC

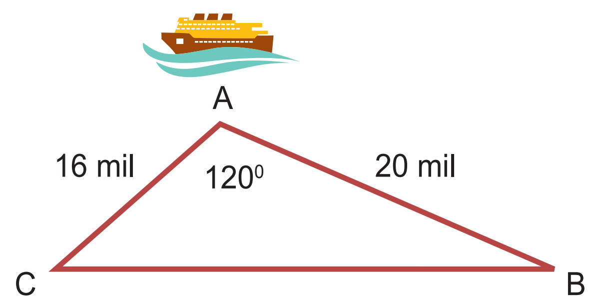


b. Panjang garis berat dihitung dengan rumus berikut.

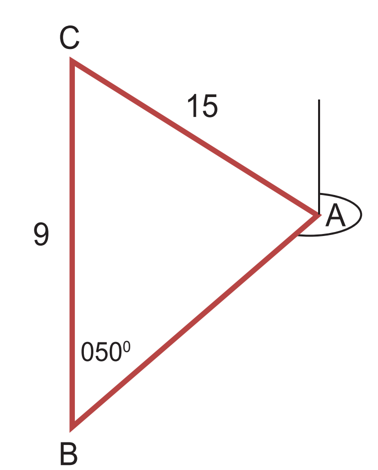
AD $= 1/2 = ½ (\sqrt{[(2)(7)^2 + (2)(3)^2 - (9)^2]}$
$= 2.95804$

3. Menggunakan aturan cosinus, $BC^2 = 16^2 + 28^2 - 2(16)(28)\cos 120^o$

$BC^2 = 1488$ ➔ Jarak kedua lampu $= \sqrt{1488} = 38.5746$ mil



4. a. Gambar posisi A, B dan C. Jarak AC = 15.0 mil dan CB = 9.0 mil



b. Menurut aturan sinus, sin A = BC sin B/AC = 9 sin 50°/15 = 0.45963

sudut A = 27.36302° ➔ sudut C = 180° - 50° - 27.36302°

= 102.63698°

Jurusan tiga angka dari A ke B = 360° – sudut CAB – sudut BCA

= 360° – 27.36302° – 102.63698°

= 230°

5. cos A + sin A tan A = cos A + sin A sin A/cos A

= $(\cos^2 A + \sin^2 A)/\cos A$ = 1/cos A = sec A

6. a. sin B cot B = sin B cos B/sin B = cos B

b. $\dfrac{1+\cos C}{\cos C}$ = 1/cos C + cos C/cos C = sec C + 1

c. $\dfrac{1+\cos A}{\sin A} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}\ \dfrac{1-\cos A}{1-\cos A}$ = $(1 - \cos^2 A)/[\sin A\,(1 - \cos A)]$

= $\sin^2 A/[\sin A\,(1 - \cos A)]$ = sin A/(1 – cos A)

7. $\dfrac{\cos A}{\sec A + \tan A} = \dfrac{\cos A}{1/\cos A + \sin A/\cos A}\ \dfrac{\cos A}{\cos A}$ = $\cos^2 A/(1 + \sin A)$

= $(1 - \sin^2 A)/(1 + \sin A)$ = 1 – sin A

8. Bentuk matematika sudah dinyatakan dalam tan A

9. a. sin 15^0 = sin (45^0 - 30^0) = ¼√2(√3 – 1)

b. cos $\dfrac{5\pi}{12}$ = sin 75^0 = sin (60^0 + 15^0) = (½√3)(¼√2(√3 + 1) + ½ ¼√2(√3 – 1)

= 1/8√6(√3 + 1) + 1/8√2(√3 – 1)

c. tan 105^0 = - tan 75^0

10. sin A = -1/3 ➔ sudut A = 199.47122^0 dan

cos B = 1/5 ➔ sudut B = 281.53696^0

cos (A – B) = cos -82.06574^0 = 0.1380368

11. a. Diagram posisi pesawat, bandara dan danau

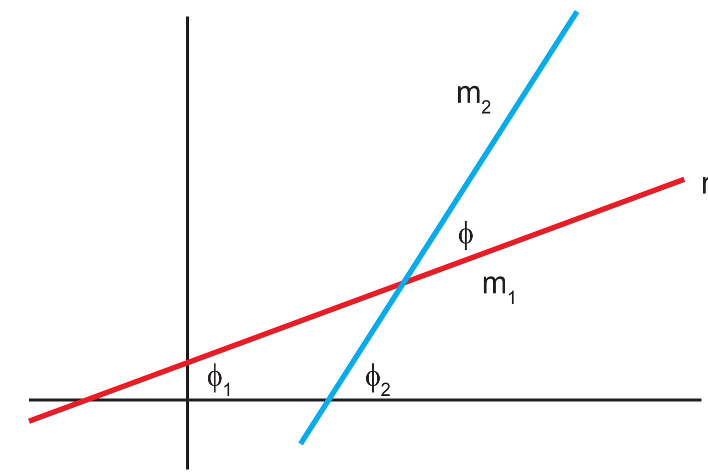
b. Dengan aturan sinus,

(jarak danau bandara)/sin ($43^0$40' - $34^0$20') = 320/sin (180^0 - $43^0$40')

jarak danau bandara = 320 sin ($43^0$40' - $34^0$20')/sin (180^0 - $43^0$40')

= 75.162657 mil

12. Grafik garis n dan p sebagai berikut.



Sudut ϕ = 180° - ϕ_1 – (180° - ϕ_2) = $\phi_2 - \phi_1$

tan ϕ = tan ($\phi_2 - \phi_1$) = (tanϕ_2 – tan ϕ_1)/(1 + tan$\phi_2$tan ϕ_1)

= ($m_2 - m_1$)/(1 + $m_2 m \phi_1$)

13. a. sin 120^0 = sin 2(60^0) = 2 sin 60^0 cos 60^0 = 2(√3/2)(1/2) = ½√3

b. tan 120^0 = tan 2(60^0) = 2 tan 60^0 /(1 – $\tan^2 60^0$) = 2(√3)/(1 - 3) = -√3

14. sin B = 3/5 ➔ sudut B = 143.1301°

a. sin 2B = sin 2(143.1301°) = -0.96

b. cos 2B = cos 2(143.1301°) = 0.28

15. a. sin y = 2 sin (y/2) cos (y/2) = 2 sin (y/2) $\sqrt{(1\text{-}\sin^2 (y/2)}$

$(-24/25)^2$ = 4 $\sin^2$ (y/2) [1 – $\sin^2$ (y/2)] = 4 $\sin^2$ (y/2) – 4$\sin^4$ (y/2)

Misalkan $\sin^2$ (y/2) = t ➔ $(-24/25)^2$ = 4t – $4t^2$

➔ $4t^2$ – 4t +$(-24/25)^2$ = 0

Diskriminan D = b^2 – 4ac = (-4)^2 – 4(4)$(24/25)^2$ = 1.2544

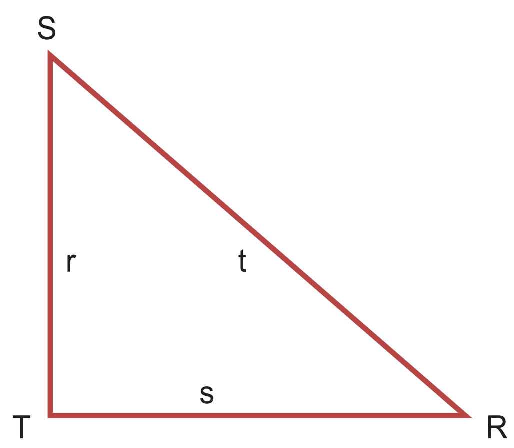
Jadi, t = (4 +√1.2544)/(2*4) = 0.64 atau t = (4 -√1.2544)/(2*4) = 0.36

sin (y/2) = 0.8 atau sin (y/2) = 0.6

b. cos (y/2) = sin y/[2 sin (y/2)] = (-24/25)/[2(0.8)] = -0.6

atau cos (y/2) = sin y/[2 sin (y/2)] = (-24/25)/[2(0.6)] = -0.8

16. a. Sketsa segitiga RST



b. $\sin R = r/t$ dan $\cos R = s/t$

➔ $\sin 2R = 2\sin R \cos R = 2(r/t)(s/t) = 2rs/t^2$

➔ $\cos 2R = \cos^2 R - \sin^2 R = (s/t)^2 - (r/t)^2 = (s^2 - r^2)/t^2$

17. a. $\sin (A + B) + \sin (A - B) = 2 \sin A \cos B$

b. $\cos (A + B) + \cos (A - B) = -2 \sin A \sin B$

18. a. $\sin 45^0 + \sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

b. $\cos 45^0 + \cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$

KRITERIA PINDAH MODUL

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Saran Referensi

Buku teks pelajaran Kurikulum 2013 kelas IV SD, Kemdikbud, 2016

Everyday Algebra for Elementary Course, William Betz, Ginn and Company, New York, 1951

Daftar Pustaka

Permendikbud No. 24 tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Matematika

Kurikulum Kesetaraan Paket A setara SD, Paket B setara SMP dan Paket C setara SMA, Ditjen PAUD dan Dikmas, Kemdikbud, 2017

https://www.zenius.net/cg/46/matematika-sma-kelas-10

http://www.bukupaket.com/2016/08/materi-matematika-kelas-10-sma.html

https://ibnufajar75.wordpress.com/materi-pembelajaran/matematikakelas-x/

http://www.matematrick.com/2012/10/materi-pelajaran-matematika-sma.html

Algebra 2 with trigonometry, Bettye C. Hall, Mona Fabricant, Prentice Hall, New Jersey, 1993

Basic quantum mechanics, JL Martin, Oxford University Press, New York, 1981

Merancang tes untuk menilai prestasi siswa, Jane S Cangelosi, Penerbit ITB Bandung, 1995

Master prolem solving maths, Joy Cheng, Federal Publications, Singapore, 2003

Matematika, R Soedjadi, Djoko Moesono, Balai Pustaka, Jakarta, 2003

Kanginan, Marthen, Teten Kustendi. 2001. Matematika SMU Kelas 3. Bandung : Grafindo

Kalkulus dan Geometri Analitis jilid I, Edwin J Purcell, Dale Varberg, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1990